תרגיל 5 טופולוגיה תשע"ז

תרגיל 5 טופולוגיה

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. תהי X קבוצה. נגדיר: $\tau = \{O \subseteq X \mid |O^c| \geq \aleph_0\} \cup \{\emptyset, X\}$. הוכיחו או הפריכו: τ טופולוגיה על X.

2. (א) תהי X קבוצה עם הטופולוגיה הקו-סופית. נניח שיש קבוצה $A \neq \emptyset, X$ שהיא סגוחה. הוכיחו כי X סופית.

   פתרון. בטופולוגיה הקו-סופית. קבוצה היא סגורה אם ורק אם היא סופית. אם A סגוחה אז A סגורה וגם A^c סגורה. כלומר A סופית וגם A^c סופית. ולכן $X = A \cup A^c$ גם סופית.

   (ב) יהי (X, τ) מרחב טופולוגי אינסופי. נניח שהקבוצה הפתוחה האינסופית היחידה היא X. האם (X, τ) היא הטופולוגיה הטריויאלית? (למחשבה: האם יש דוגמא כזאת שבה יש אינסוף קבוצות פתוחות?)

   פתרון. לא. כי אפשר לקחת כל קבוצה אינסופית X ואת $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ כאשר $a \in X$. קל לבדוק שזו טופולוגיה. יש גם דוגמא עם אינסוף קבוצות פתוחות.
   ניקח $X = \mathbb{N}$. נסמן $A_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$. כלומר $A_n = \mathbb{N} \cap (0, n]$. ברור שכל A_n היא קבוצה סופית. קל לוודא ש $\tau = \{A_n\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\}$ היא אכן טופולוגיה.

3. יהי (X, τ) מרחב טופולוגי. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

   (א) הטופולוגיה טריויאלית.

   (ב) לכל סדרה x_n ו $x \in X$ מתקיים $x_n \to x$ (כל סדרה מתכנסת לכל מספר)

   פתרון. נניח שהטופולוגיה טריויאלית. ניקח סדרה x_n כלשהיא ואיבר x. צריך להוכיח ש $x_n \to x$. תהי U קבוצה פתוחה כלשהיא כך ש $x \in U$. היות שהטופולוגיה טריויאלית, בהכרח $U = X$. ולכן בוודאי $x_n \in X$ החל מ n מסוים (במקרה $n = 1$) ולכן $x_n \to X$. בכיוון השני, נניח שכל סדרה מתכנסת לכל מספר אבל הטופולוגיה לא טריויאלית. אז יש קבוצה פתוחה $U \neq \emptyset, X$ אז ניקח איזשהיא סדרה x_n שכל איבריה ב $X \backslash U$ ואיבר $x \in U$ אבל לפי הנתון $x_n \to x$ ולכן משלב מסוים $x_n \in U$ בסתירה.

4. (א) יהי $X = \{a, b\}$ עם הטופולוגיה $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ (כזכור זהו מרחב Sierpi□ski).
מצאו את כל הסדרות המתכנסות לאיבר אחד ואת כל הסדרות המתכנסות לשני איברים.

פתרון. יש רק שני איברים שסדרה יכולה להתכנס אליהם. קל לבדוק שכדי שסדרה תתכנס ל a צריך שהחל משלב מסוים היא תהיה a (כי $\{a\}$ קבוצה פתוחה) מצד שני כל סדרה מתכנסת ל b (כי $\{a, b\}$ הקבוצה הפתוחה היחידה שמכילה את b). לסיכום: סדרה שהיא a החל ממקום מסוים מתכנסת גם ל a וגם לb. שאר הסדרות מתכנסות לb בלבד.

(ב) תהי X קבוצה אינסופית עם הטופולוגיה הקו-סופית. נניח ש x_n היא סדרה שכל איבריה שונים. הוכיחו כי היא מתכנסת לכל $x \in X$. (הסיקו כי מרחב קו-סופי הוא מטריזבילי אם ורק אם הוא סופי).

פתרון. יהי $x \in X$ ותהי U קבוצה פתוחה. כלומר U^c היא קבוצה סופית. היות שבסדרה $\{x_n\}$ אין חזרות החל משלב מסוים כל אברי הסדרה נמצאים ב U(יש רק מספר סופי של איברים ב U^c) לכן $x_n \to x$.

מכאן נסיק: נניח X מרחב קו-סופי. אם X סופי אז X דיסקרטי (כל קבוצה היא סופית ולכן כל קבוצה היא סגורה) ולכן מטריזבילי. אם X אין סופי אז יש סדרה שכל איבריה שונים. סדרה זו מתכנסת ליותר מאיבר אחד ולכן X לא מטריזבילי (במרחבים מטריים יש יחידות לגבול).

5. תהי $f : (X, \tau_1) \to (Y, \sigma_1)$ פונקציה רציפה בין 2 מרחבים טופולוגיים. נניח כי $\tau_1 \subseteq \tau_2$ ו $\sigma_2 \subseteq \sigma_1$. הוכיחו כי

$$f : (X, \tau_2) \to (Y, \sigma_2)$$

היא גם רציפה. (על אותו עקרון, שימו לב לעובדה הבאה: כל פונקציה לתוך מרחב טריויאלי היא רציפה. כל פונקציה מתוך מרחב דיסקרטי היא רציפה).

פתרון. תהי U קבוצה פתוחה ב σ_2. אזי היא פתוחה גם ב σ_1 היות ש $f : (X, \tau_1) \to (Y, \sigma_1)$ רציפה אז $f^{-1}(U)$ פתוחה ב τ_1 ולכן היא גם פתוחה ב τ_2. לכן $f : (X, \tau_2) \to (Y, \sigma_2)$ רציפה כנדרש. על אותו עקרון כל פונקציה $f : X \to Y$ לתוך מרחב טריויאלי Y היא רציפה (כי הפתוחות היחידות הן $\emptyset, Y$ והמקורות שלהן הם $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \quad f^{-1}(Y) = X$ שהן פתוחות. כמו כן כל פונקציה $f : X \to Y$ מתוך מרחב דיסקרטי X היא רציפה כי המקור של כל קבוצה היא קבוצה פתוחה.

6. הוכיחו: מרחב מטרי X מקיים את תכונה T_1 אם ורק אם כל נקודון (קבוצה עם איבר אחד) היא קבוצה סגורה.

פתרון. נניח ש X מקיים את תכונה T_1 ונניח $a \in X$. לכל $b \in X$ כך ש $a \neq b$ ניתן למצוא U_b פתוחה כך ש $b \in U_b$ אבל $a \notin U_b$ (לפי תכונה T_1). עכשיו נסתכל על $Y = \bigcup_{b \in X \setminus \{a\}} U_b$ ברור ש

$$Y = X \setminus \{a\}$$

וכן Y פתוחה בתור איחוד פתוחות ולכן משילמתה $\{a\}$ היא קבוצה סגורה.

מצד שני נניח שכל נקודה היא קבוצה סגורה. ניקח $a,b \in X$ כך ש $a \neq b$. היות ש $\{a\}$ היא קבוצה סגורה נקבל ש $U=\{a\}^c$ היא קבוצה פתוחה. $b \in U$ ו $a \notin U$ ולכן אקסיומה T_1 מתקיימת.

7. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. עבור קבוצה $A \subseteq X$ נגדיר את הפונקציה $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ לפי:

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

הוכיחו כי X קשירה אם ורק אם לכל $A \subset X$ הפונקציה χ_A אינה רציפה.

פתרון. X קשירה אם ורק אם אין $A \subseteq X$ (למעט $\emptyset, X$) שהיא סגוחה. לכן מספיק להראות ש χ_A רציפה אם ורק אם A סגוחה. אבל באמת, נניח ש A סגוחה ותהי $U \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה אז

$$\chi_A^{-1}(U) \in \{\emptyset, A, A^c, X\}$$

ולכן χ_Aרציפה. מצד שני, אם χ_A רציפה אז

$$A = \chi_A^{-1}(\{1\})$$

$$A = \chi_A^{-1}((0.5, 1.5))$$

ולכן A גם פתוחה וגם סגורה.

8. בשאלה הבאה נוכיח שקיימים אינסוף ראשוניים (ודאו עם עצמכם שאתם יודעים להוכיח זאת בדרך נוספת אחת לפחות).
עבור $a \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}$ נגדיר סדרה חשבונית דו-צדדית באופן הבא: $S = a + d\mathbb{Z} = \{a + dk | k \in \mathbb{Z}\}$.
נגדיר על $\mathbb{Z}$ את הטופולוגיה הבאה: $O \in \tau$ אם ורק אם לכל $x \in O$ קיימת סדרה חשבונית דו-צדדית $S = x + d\mathbb{Z}$ המקיימת $S \subseteq O$.

(א) הוכיחו שזו אכן טופולוגיה.

פתרון. $\emptyset \in \tau$ באופן ריק. $\mathbb{Z} \in \tau$ כי לכל $x \in \mathbb{Z}$ ולכל $S = x + d\mathbb{Z}$, $S \subseteq \mathbb{Z}$.
יהי $\{O_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$ אוסף של קבוצות פתוחות. אם כולן ריקות גם האיחוד הוא קבוצה ריקה ולכן שייך ל$-\tau$. אחרת, יהי $x \in \cup O_i$. מהגדרת איחוד, קיים $j \in I$ עבורו $x \in O_j$. מהגדרת τ קיימת $S = x + d\mathbb{Z}$ המקיימת: $S \subseteq O_j \subseteq \cup O_i$ ולכן $\cup O_i \in \tau$.
יהי $\{O_i\}_{i=1}^n \subseteq \tau$ אוסף של קבוצות פתוחות. אם אחת מהן ריקה, החיתוך ריק ולכן שייך ל$-\tau$. אחרת, יהי $x \in \cap O_i$. מהגדרת חיתוך, $x \in O_i$ לכל $1 \leq i \leq n$. לכן, קיימות $S_i = x + d_i\mathbb{Z}$ המקיימות $S_i \subseteq O_i$.
כעת, $S = \cap S_i = x + d_1 d_2 \dots d_n \mathbb{Z}$ מקיימת $S \subseteq O_i$ לכל i ולכן $S \subseteq \cap O_i$, ומהגדרת τ נקבל שאכן $\cap O_i \in \tau$.
אם כן, τ אכן טופולוגיה.

(ב) הוכיחו שכל סדרה חשבונית דו-צדדית היא קבוצה סגוחה.

פתרון. תהי $S = a + d\mathbb{Z}$ סדרה חשבונית דו-צדדית. יהי $x \in S$. S עצמה מקיימת $S \subseteq S$ ולכן S פתוחה.

לצד שני, נתבונן בקבוצה S^c. יהי $x \in S^c$. הסדרה S היא מחלקת השקילות של a מודולו d. כלומר, $x \in S$ אם ורק אם $x \equiv a \mod d$. אם כן:

$$S^c = \bigcup_{\substack{k=0 \\ k \neq a}}^{d-1} (k + d\mathbb{Z})$$

לכן S^c פתוחה (איחוד סופי של פתוחות) ולכן S סגורה, ובסה"כ S סגוחה.

(ג) הניחו בשלילה שאיחוד כל הסדרות שמתחילות ב-0 עם הפרשים ראשוניים הוא סופי והגיעו לסתירה.

פתרון. נניח בשלילה שהאיחוד $\cup p\mathbb{Z}$ כאשר p ראשוני הוא סופי (כלומר, באיחוד משתתפות מספר סופי של קבוצות ולכן יש מספר סופי של ראשוניים).

מתקיים $\cup p\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \setminus \{1, -1\}$. מכיוון שכל אחת מהקבוצות $p\mathbb{Z}$ היא סגורה (כמו שראינו בסעיף הקודם) והאיחוד סופי, גם האיחוד הוא קבוצה סגורה: $\mathbb{Z} \setminus \{1, -1\}$ סגורה. לכן $\{1, -1\}$פתוחה.

אלא שבטופולוגיה שלנו, קבוצה היא פתוחה רק אם היא מכילה סדרה חשבונית דו-צדדית ובפרט היא צריכה להיות אינסופית וסתירה! לכן האיחוד אינו סופי, וישנם אינסוף ראשוניים.

(ד) התפעלו.

פתרון. בשעה שיתבונן האדם במעשיו וברואיו הנפלאים הגדולים, ויראה מהם חכמתו שאין לה ערך ולא קץ - מיד הוא אוהב ומשבח ומפאר ומתאווה תאווה גדולה לידע טופולוגיה, כמו שאמר דוד 'צמאה נפשי, לאלוהים--לאל חי'

9. על $\mathbb{Z}$ נגדיר את הטופולוגיה הבאה: $\tau = \{\emptyset, \mathbb{Z}\} \cup \{O_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, כאשר $O_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$. הוכיחו שזהו מרחב טופולוגי שאינו מטריזבילי.

פתרון. ראשית, מהגדרת τ אכן $\emptyset, \mathbb{Z} \in \tau$.

יהי $\{O_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$. אם כולן ריקות אז האיחוד ריק ושייך ל$-\tau$; אם קיים $i \in I$ עבורו $O_i = \mathbb{Z}$ אז האיחוד הוא $\mathbb{Z}$ ושייך ל$-\tau$. אחרת, לכל i קיים n_i עבורו $O_i = O_{n_i} = \{n_i, n_i+1, n_i+2, \dots\}$.

אם הקבוצה $\{n_i\}_{i\in I}$ לא חסומה מלרע, אז האיחוד $\cup O_i$ שווה ל$-\mathbb{Z}$ (מדוע?) ולכן שייך ל$-\tau$. אחרת, נסמן $n = \min\{n_i\}$. $O_i \subseteq O_n$ לכל $i \in I$ ולכן $\cup O_i = O_n \in \tau$. בכל אופן האיחוד שייך גם הוא ל$-\tau$.

יהי $\{O_i\}_{i=1}^n \subseteq \tau$. אם אחת מהקבוצות ריקה החיתוך הוא ריק ולכן שייך ל$-\tau$. אחרת, נסמן: $m = \max\{i\}$ ואז $O_m \subseteq O_i$ לכל $1 \leq i \leq n$ ולכן $\cap O_i = O_m \in \tau$. בכל אופן החיתוך שייך ל$-\tau$ ולכן τ טופולוגיה.

הקבוצה $\{k\}^c = \{\dots, k-2, k-1\} \cup \{k+1, k+2, \dots\}$ אינה פתוחה ולכן $\{k\}$ אינה קבוצה סגורה. במרחב מטרי כל נקודון הוא קבוצה סגורה ולכן המרחב אינו מטריזבילי.