

פתרון תרגיל 11

(1.6) נניח בשלילה ש $u \neq \alpha v$ אזי הם בת"ל וניתן להרחיבם לבסיס ל V . כעת נגדיר פונקציונל באופן הבא:

$$\text{לכל } w \text{ וקטור בסיס שונה מ } v \quad \varphi(w) = 0 \quad \text{ועבור } v \quad \varphi(v) = 1$$

הפונקציונל הנ"ל לנארי וסותר את הנתון.

(1.10) (א) הרכבת העתקות לינאריות היא העתקה לינארית.
(ב)

$$\begin{aligned} T^*(\alpha\phi_1 + \phi_2) &= \varphi(T(\alpha\phi_1 + \phi_2)) = \varphi(\alpha T(\phi_1) + T(\phi_2)) = \\ &= \alpha\varphi(T(\phi_1)) + \varphi(T(\phi_2)) = \alpha T^*(\phi_1) + T^*(\phi_2) \end{aligned}$$

$$[T_\alpha]^* = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = [T_\alpha] \quad (2.1)$$

(2.4) (א) נסמן $T = A + iB$ באשר B, A צל"ע. אזי
 $T^* = (A + iB)^* = A^* + (iB)^* = A^* - iB^* = A - iB$
נחבר ונחסר את שני השוויונות ונקבל

$$T - T^* = 2iB \rightarrow B = \frac{T - T^*}{2i} \quad \text{ו-} \quad T + T^* = 2A \rightarrow A = \frac{T + T^*}{2}$$

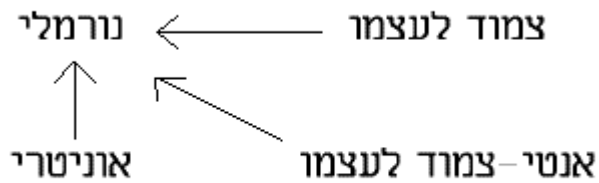
(ב) נניח T נורמלי כלומר $TT^* = T^*T$. צ"ל כי $AB = BA$.

$$\begin{aligned} AB &= \frac{T + T^*}{2} \frac{T - T^*}{2i} = \frac{(iT + iT^*)(T - T^*)}{2i} \\ &= \frac{iT^2 - iTT^* + iT^*T - i(T^*)^2}{2i} = \frac{iT^2 - iT^*T + iTT^* - i(T^*)^2}{2i} \\ &= \frac{(T - T^*)(iT + iT^*)}{2i} = BA \end{aligned}$$

(2.5) באופן דומה לתרגיל הקודם, נסמן $T = X + Y$ באשר X אופרטור צל"ע ו- Y אנטי-צל"ע. אזי:

$$T^* = X^* + Y^* = X - Y \quad \text{נחבר ונחסר את שני השוויונות ונקבל} \quad X = \frac{T + T^*}{2}, Y = \frac{T - T^*}{2}$$

(2.8) א+ב



הגרירות ברורות, למשל אנטי-צל"ע לנורמלי: מתקיים $T^* = -T$ וצל"ל כי $TT^* = T^*T$. אכן, $TT^* = T(-T) = -TT = T^*T$ באופן דומה לצל"ע, אוניטרי.

נמצא למשל מטריצה נורמלית שאיננה אוניטרית, צל"ע או אנטי צל"ע. נבחר $M = \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$.

מטריצות אלכסוניות מתחלפות לכן M נורמלית. אך M לא שווה ל- M^* (לכן לא צל"ע), ולא ל- $-M^*$ (לכן לא אנטי צל"ע), וכמו כן M^* לא שווה ל- M^{-1} (לכן לא אוניטרית).

ג) לפי הגרירות שראינו בסעיף א', ברור כי צל"ע חיתוך נורמלי = צל"ע, אנטי-צל"ע חיתוך נורמלי = אנטי צל"ע, אוניטרי חיתוך נורמלי = אוניטרי.

צמוד לעצמו וגם אנטי-צמוד לעצמו: $T = T^*, -T = T^* \rightarrow T = -T \rightarrow 2T = 0$. שהמאפיין שלו לא 2) נקבל רק $T = 0$.

צל"ע וגם אוניטרי: $T^* = T, T^* = T^{-1} \rightarrow T = T^{-1} \rightarrow T^2 = I$

אנטי צל"ע וגם אוניטרי: $T^* = -T, T^* = T^{-1} \rightarrow T^{-1} = -T \rightarrow T^2 = -I$