אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

תאריך הבחינה: 14.2.10

שם המרצה: גרבוזן, גולדשטיין, גרזלקו, פיינליוק

שם הקורס: חדו"א 1 לחשמל וכו'

מס' הקורס: 9811

מיועד לתלמידי: חשמל וכו'

שנה: א סמסטר: א מועד ב

משך הבחינה: 3'.00

חומר עזר: מחשבון קטן, דף A4 (שני צדדים)

b_{n+1}

מס' נבחן: ____________

ענה על 5 שאלות וכתוב את מספרי השאלות בעמוד הראשון של המחברת. כתוב תשובות ברורות ומנומקים היטב.

1. א) נתונה סדרה $\{a_n\}$ המתכנסת וסדרה $\{b_n\}$ חסומה כך שלכל n מתקיים $b_{n+1} \le b_n + (a_{n+1} - a_n)$. הוכח שהסדרה $\{b_n\}$ מתכנסת. (10 נקודות)

ב) חשב: $\lim_{n\to\infty}(3^n + 4^n)^{\frac{1}{n}}$. (10 נקודות)

2. א) חשב את α כך ש: $\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+x^2}-x^2-2}{x^\alpha}$ קיים ושונה מאפס. (10 נקודות)

ב) חשב: $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\,\sin x - x}{(\sin x)^3}$. (10 נקודות)

3. א) הוכח שלכל מספר ממשי a , למשוואה $2x + \sin x + a = 0$ יש פתרון והפתרון הוא יחיד. (10 נקודות)

ב) הוכח ש: $f(x) = \cos x$ רציפה במידה שוה על $(-\infty,\infty)$. (10 נקודות)

4. חקור את הפונקציה: $y = (\sin x)^3 + (\cos x)^3$. (20 נקודות)

5. חשב: א) $\int \frac{\ln x\, dx}{x(\ln x)^2 + x}$ ב) $\int x^3 (\ln x)^2\, dx$. (כל אחד 10 נקודות)

6. חשב: $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2\arctan\frac{k}{n}}{n^3}$. (20 נקודות)

בהצלחה!

כאן לבדוק שאלות: 2, 3, 4, 5, 6.

$$b_{n+1} - b_n \leq a_{n+1} - a_n$$

$$2\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\frac{1}{2}x^4+o(x^5)\right)-x^2-2$$

$$=2+2x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^5)-x^2-2$$

$$=\frac{-\frac{1}{8}x^4+o(x^5)}{x^4} \to \alpha=4$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x-x}{\sin x^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \frac{\frac{1}{2}\sin 2x-x}{\sin^3 x}$$

$$=\frac{\cos 2x-1}{3\sin^2 x\cos x} = \frac{0}{0}$$

$$=\frac{-\sin^2 x}{3\sin^2 x\cos x} = -\frac{1}{3\cos x} = -\frac{1}{3}$$

(2) א.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{1+x^2}-x^2-2}{x^\alpha}$$

פיתוח מקלורן:

$$* \quad (1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\frac{1}{2!}(x^2)^2+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdot\frac{1}{3!}(x^2)^3+o(x^6)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^5)\right)-x^2-2}{x^\alpha}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-x^2-\frac{1}{4}x^4+o(x^5)-x^2-2}{x^\alpha}$$

$$=\lim_{x\to 0}-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4+o(x^5)}{x^\alpha}$$

+

אם $\alpha<4$ הגבול קיים ושווה לאפס,

אם $\alpha>4$ הגבול שווה לאינסוף

ואם $\alpha=4$ הגבול קיים ושווה ל $-\frac{1}{4}\neq 0$

לכן $\boxed{\alpha=4}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x-x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin 2x-x}{\sin^3 x}=\frac{0}{0}$$

לופיטל

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 2x-1}{3\sin^2 x\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{3\sin^2 x\cdot\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{3\cos x}\underset{x=0}{=}\frac{-2}{3}$$

+

5) א.

$$\int \frac{\ln x\, dx}{x\ln^2 x + x} = \int \frac{\ln x\, dx}{(\ln^2 x+1)x} = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right| =$$

ביאור מיותר..

$$\int \frac{t\cdot dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}\, dt = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left((\ln x)^2+1\right) + C$$

ב.

$$\int x^3 \cdot \ln^2 x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln^2 x & dv = x^3 dx \\ du = \frac{2\ln x}{x} dx & V = \frac{1}{4}x^4 \end{array} \right|$$

(אינטגרציה בחלקים)

$$=$$

$$= \ln^2 x \cdot \frac{1}{4}x^4 - \int \frac{2\ln x}{x}\cdot\frac{1}{4}x^4\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln^2 x \cdot x^4 - \frac{1}{2}\int x^3 \ln x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = x^3 \\ du = \frac{dx}{x} & V = \frac{1}{4}x^4 \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{4}\ln^2 x \cdot x^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4 \ln x - \int \frac{x^4}{4x}\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{4}\ln^2 x \cdot x^4 - \frac{1}{8}x^4 \cdot \ln x + \frac{1}{8}\int x^3\, dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \cdot \ln^2 x - \frac{1}{8}x^4 \ln x + \frac{1}{32}x^4 + C$$

20/20

$$\frac{k^2 \operatorname{arctg}\frac{k}{n}}{n^3} = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2\,\mathrm{arctg}\frac{k}{n}}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^2\mathrm{arctg}\left(\frac{k}{n}\right)$$

הגורם $\frac{1}{n}$ אינו תלוי ב-k, לכן ניתן להוציא אותו כגורם משותף מחוץ לסכום:

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\mathrm{arctg}\left(\frac{k}{n}\right)$$

נגדיר פונקציה $f(x)=x^2\,\mathrm{arctg}\,x$

את האינטגרל המסוים $\int_0^1 f(x)dx$ ניתן לחשב ע"י חלוקה של הקטע ל-n קטעים שווים (באורך $\frac{1}{n}$) וסכימה של מכפלות ערך הפונק' בכל נק' כפול אורך הקטע. הגבול של ערך הסכום הזה כאשר n שואף לאינסוף שווה לאינטגרל המסוים, כלומר:

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum f(\xi_k)$$ (נוסחת רימן)

כאשר ξ_k היא נק' בקטע $[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]$.

אם בכל קטע ניקח את הנקודה הראשונה $(\frac{k}{n})$ נקבל:

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^2\,\mathrm{arctg}\,x\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\left(\frac{k}{n}\right)^2\mathrm{arctg}\left(\frac{k}{n}\right)$$

וזהו הגבול אותו יש לחשב, ולכן נחשב במקומו את האינטגרל המסוים:

$$\int_0^1 x^2\cdot\mathrm{arctg}\,x\,dx=\left|\begin{matrix}u=\mathrm{arctg}\,x & dv=x^2dx\\ du=\frac{dx}{1+x^2} & v=\frac{1}{3}x^3\end{matrix}\right|$$

$$=\frac{1}{3}x^3\cdot\mathrm{arctg}\,x\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{x^3}{(1+x^2)}\,dx=$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 & x^2+1\\ \hline x^3+x & x\\ -x & \end{array}$$

$$=\frac{1}{3}x^3\mathrm{arctg}\,x\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

20/20

$$=\frac{1}{3}x^3\mathrm{arcg}\,x\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 x\,dx+\frac{1}{6}\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3\mathrm{arctg}\,x\Big|_0^1-\frac{1}{6}x^2\Big|_0^1+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{3}\underbrace{\overset{\frac{\pi}{4}}{\mathrm{arctg}1}}_{\text{מספר אי-רציונלי}}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\ln 2$$

$$\approx 0.2106$$

$|\cos x_1 - \cos x_2| < \varepsilon$

$2 < \varepsilon$

$|x_1 - x_2| < \delta \rightarrow |\cos x_1 - \cos x_2| < \varepsilon$

$$\frac{|\cos x_1 - \cos x_2|}{|x_1 - x_2|} = f'(c)$$

$|\cos x_1 - \cos x_2| \leq f'(c)|x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_2| < \delta$

3 א.

$2x+\sin x+a=0$

נגדיר פונקציה: $f(x)=2x+\sin x+a$

כלומר יש להוכיח שלכל a יש ל-f נק' חיתוך יחידה עם ציר ה-x. אם נגזור נקבל

$f'(x)=2+\cos x$

וידוע ש $|\cos x|\le 1$ לכן $|f'(x)|\ge 1>0$

כלומר הנגזרת תמיד חיובית, משמע הפונקציה f עולה ממש לכל $x\in\mathbb{R}$ $f(x)$ חח"ע. כמו כן:

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 2x+\sin x=-\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} 2x+\sin x=\infty$

($\sin x$ חסומה בין 1 ל-1- ולכן לא משפיעה על הגבול במקרה זה...)

לכן קיימת נקודה $a\in\mathbb{R}$ כך ש $f(a)<0$ (אחרת $f(x)$ חסומה ע"י 0 וזו סתירה לכך ש $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$)

ובאופן דומה קיימת נק' $a<b\in\mathbb{R}$ כך ש $f(b)>0$.

הפונקציה f היא סכום של פונק' אלמנטריות ולכן רציפה לכל x, ובפרט היא רציפה בקטע $[a,b]$,

וגם $f(a)\cdot f(b)<0$ ולכן לפי משפט חל קיימת נק' $c\in(a,b)$ כך ש $f(c)=0$, כלומר

$2\cdot c+\sin c+a=0$

כיוון ש f חח"ע לא ייתכן שקיימת נק $c\neq d\in\mathbb{R}$ כך ש $f(d)=f(c)=0$ ולכן זהו הפתרון היחיד למשוואה. הוכחנו קיום פתרון ויחידותו - מש"ל.

(3) ב. צ"ל: לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_1,x_2\in R$:

$$|x_2-x_1|<\delta \longrightarrow |\cos x_2-\cos x_1|<\varepsilon$$

נבין בנגזרת של $f(x)$:

$$f'(x)=-\sin x$$

וידוע ש $|\sin x|\le 1$ ולכן הנגזרת חסומה ע"י 1

$|f'(x)|\le 1$. הפונקציה $f(x)$ היא פונק' אלמנטרית

ולכן רציפה לכל $x\in\mathbb{R}$, לכן יהיו $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ (בה"כ $x_1<x_2$)

לפי משפט לגרנג' קיימת נק' $c\in(x_1,x_2)$ כך ש

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{|f(x_2)-f(x_1)|}{|x_2-x_1|}=|f'(c)|$$

$$\Rightarrow |f(x_2)-f(x_1)|=|f'(c)|\cdot|x_1-x_2|$$

אבל הראנו שלכל $c\in\mathbb{R}$, $|f'(c)|\le 1$, לכן

$$|\cos x_2-\cos x_1|\le 1\cdot|x_2-x_1|$$

לכן לכל $\varepsilon>0$ נבחר $\delta=\varepsilon$, ישנו:

$$|x_2-x_1|<\delta \underset{\delta=\varepsilon}{\Rightarrow} |x_2-x_1|<\varepsilon \Rightarrow |\cos x_2-\cos x_1|<\varepsilon$$

מטרנזיטיביות היחס $\le$

לכן, הראינו שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x_2,x_1:

$$|x_2-x_1|<\delta \longrightarrow |\cos x_2-\cos x_1|<\varepsilon$$

לכן $f(x)=\cos x$ רציפה במידה שווה

(בכך הראינו גם שכל פונק' שהנגזרת שלה חסומה

היא רציפה במידה שווה...)

$y = \sin^3 x + \cos^3 x$ (4)

ידוע שאם $f(x), g(x)$ פונק' מחזוריות אזי:

א. $(f(x))^n$ לכל $n \in \mathbb{N}$ גם מחזורית

ב. $(f(x)+g(x))$ גם מחזורית

וכן ש $\sin x$ ו- $\cos x$ פונק' מחזוריות בעלות מחזור $T = 2\pi$, ולכן גם y היא פונק' מחזורית, שהמחזור שלה אינו גדול מ- 2π, ולכן נחקור את y בתחום $[0, 2\pi)$ ונסיק מכך את ההתנהגות בכל התחום $(-\infty, \infty)$:

תחום הגדרה - y מוגדרת לכל x

תחומי עליה וירידה:

$y' = 3\sin^2 x \cos x - 3\cos^2 x \sin x$

$y' = 0 \Rightarrow 3\sin x \cos x(\sin x - \cos x)$

$\sin x = 0 \to x_1 = 0,\ x_2 = \pi,$

$\cos x = 0 \to x_3 = \frac{\pi}{2},\ x_4 = \frac{3}{2}\pi$

$\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow x_5 = \frac{\pi}{4},\ x_6 = \frac{5}{4}\pi$

x	0	$0<x<\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<x<\pi$	π	$\pi<x<\frac{5}{4}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{5}{4}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$	2π
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{2}{\sqrt{2}^3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{2}{\sqrt{2}^3}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

* הנגזרת מוגדרת לכל x בתחום וכן הפונק' מוגדרת לכל x בתחום לכן אין אסימפטוטות אנכיות ולכן גם אין פה נקודות חשודות לקיצון, ואלו תחומי העליה והירידה: (בתחום)

y עולה ב: $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{5\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$!

y יורדת ב: $(0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi) \cup (\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$

נק' קיצון:

נק' מינימום: $(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\pi, -1)$, $(\frac{3}{2}\pi, -1)$

נק' מקסימום: $(0, 1)$, $(\frac{\pi}{2}, 1)$, $(\frac{5}{4}\pi, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

לא סוף מחזורי

המשך

④ המשך

אסימפטוטות משופעות: נראה שלא קיימת אסימפטוטה משופעת:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-x =$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty} \sin^3 x+\cos^3 x+x = \mp\infty$$

הגבול לא קיים (במובן סופי) בשני הצדדים, לכן אין אסימפטוטות משופעות.

נק' פיתול:

$$y'=3\sin x\cos x(\sin x-\cos x)$$

$$=\frac{3}{2}\sin 2x(\sin x-\cos x)$$

$$y''=\frac{3}{2}\left(2\cos 2x(\sin x-\cos x)+\sin 2x(\cos x+\sin x)\right)$$

$$y''=0 \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2}\left(2(\cos^2 x-\sin^2 x)(\sin x-\cos x)+2\sin x\cos x(\cos x+\sin x)\right)=0$$

$$2\cos^2 x\sin x+2\sin^3 x-2\cos^3 x+2\sin^2 x\cos x+2\sin^2 x\cos x+2\cos^2 x\sin x=0$$

$$4\cos^2 x\sin x+4\sin^2 x\cos x-2\sin^3 x-2\cos^3 x=0$$

$$4\cos x\sin x(\cos x+\sin x)=2(\sin^3 x+\cos^3 x)$$

? לא הספקתי לפתור את זה.. חבל!

חיתוך עם הצירים:

$$y=0 \Rightarrow \sin^3 x=-\cos^3 x$$

$$\Rightarrow \sin x=-\cos x$$

$$x_1=\frac{3}{4}\pi,\quad x_2=\frac{7}{4}\pi$$

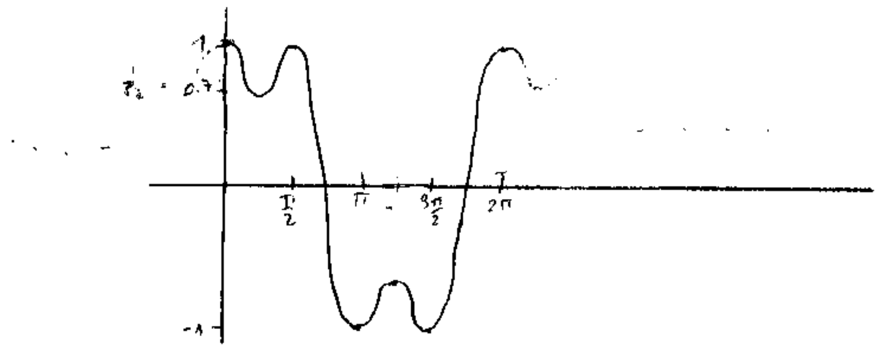
חיתוך עם ציר x: $(\frac{3}{4}\pi, 0)$ (נכון רק למחזור) $(\frac{7}{4}\pi, 0)$

אינסוף מחזורי! אינסוף מחזורי!

חיתוך עם ציר y: $(0, 1)$

במשבצת

המשך ④ שרטוט:



15/20