מבחן לינארית 1 קיץ תשפ"ב מועד ב'

11.9.2022

מרצים: גיא בלשר, אריאל ויצמן, אלעד עטייא, ארז שיינר.
מתרגלים: שחר חנניה, נעה כהן, כנה נהיר, גלעד פורת־קורן, עידו פלדמן, הראל רוזנפלד, אושרית שטוסל.
הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- משך המבחן: שלוש שעות.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי – מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- יש לכתוב בכל תשובה פתרון מלא ומפורט.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תיבדק.

ניתן לענות משני צידי הדף.

בהצלחה!

1. (24 נק') יהי פרמטר $a \in \mathbb{R}$. נתבונן במטריצה

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -a^2 & -3 & 1 \\ a & 1 & a^2-1 \\ 0 & a-3 & a^3-a+1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$$

ובווקטור העמודה

$$.b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ a^2+a-1 \\ a^3+a^2-a-3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

(א) קבעו לכל ערך של הפרמטר a האם למערכת המשוואות ההומוגנית $Ax=0$ יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון (מעל שדה הממשיים).

(ב) קבעו לכל ערך של הפרמטר a האם למערכת המשוואות $Ax=b$ יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון (מעל שדה הממשיים).

(ג) האם קיים ערך של הפרמטר a כך שלכל $w \in \mathbb{R}^4$ קיים לפחות פתרון אחד למערכת $Ax=w$ (מעל שדה הממשיים)? הוכיחו את תשובתכם.

דף נוסף לשאלה מספר ___

דף נוסף לשאלה מספר ___

2. (24 נק') נביט ב-$\mathbb{R}_3[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה לכל היותר 3.
לכל $c \in \mathbb{R}$, נגדיר תת־קבוצה של $\mathbb{R}_3[x]$ על ידי

$$U_c = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(c) = p(-c) = 0\}.$$

(א) הוכיחו כי לכל $c \in \mathbb{R}$ מתקיים כי U_c הוא תת־מרחב של $\mathbb{R}_3[x]$.

(ב) מצאו בסיס ומימד ל-U_1.

(ג) הראו כי קיים $c \in \mathbb{R}$ שעבורו $\dim U_c = 3$, ומצאו בסיס ומימד ל-U_c במקרה זה.

דף נוסף לשאלה מספר ___

דף נוסף לשאלה מספר ___

3. (18 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית.

(א) הוכיחו או הפריכו: אם $n=3$, אז קיימת מטריצה $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ שעבורה מתקיים $R(A)=R(B)$, $C(A)=C(B)$ וגם $\det(B)=-\det(A)$.

(ב) הוכיחו או הפריכו: אם $n=2$, אז קיימת מטריצה $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ שעבורה מתקיים $R(A)=R(B)$, $C(A)=C(B)$ וגם $\det(B)=-\det(A)$.

דף נוסף לשאלה מספר ___

דף נוסף לשאלה מספר ___

4. (20 נק') יהיו V,W מרחבים וקטוריים נוצרים סופית מעל $\mathbb{F}$, ותהי $T\colon V\to W$ העתקה לינארית כך ש-$T\neq 0$.

(א) הוכיחו כי קיים בסיס $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ של V כך ש-$Tv_i\neq 0$ לכל $1\leq i\leq n$.

(ב) <u>הוכיחו או הפריכו:</u> קיימים וקטור $v\in V$ ובסיס סדור C של W שעבורם מתקיים $[Tv]_C=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$.

דף נוסף לשאלה מספר ___

דף נוסף לשאלה מספר ___

5. (24 נק') יהיו V, W מרחבים וקטוריים נוצרים סופית מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי $T: V \to W$ העתקה לינארית.

(א) תהי $S: W \to V$ העתקה לינארית המקיימת $TST = T$. הוכיחו כי מתקיים $\ker S \cap \mathrm{Im}T = \{0_W\}$.

(ב) תהי $S: W \to V$ העתקה לינארית המקיימת $TST = T$. <u>הוכיחו או הפריכו:</u> $\ker S = \{0_W\}$.

(ג) הוכיחו כי קיימת העתקה לינארית $S: W \to V$ שעבורה $TST = T$.

דף נוסף לשאלה מספר ___

דף נוסף לשאלה מספר ___