

מבחן לינארית 1 קיץ תשפ"ג מועד ב'

13.9.2023

מרצים: גיא בלשר, אריאל ויצמן, אלעד עטייא, ארז שיינר.
מתרגלים: ראם וקסמן, רועי חסון, אלכסנדר טולסניקוב, כנה נהיר, עידו פלדמן, הראל רוזנפלד, אושרית שטוסל.
הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- משך המבחן: שלוש שעות.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי – מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- יש לכתוב בכל תשובה פתרון מלא ומפורט.
- הניקוד לכל שאלה כתוב בתחילתה, והוא מתחלק באופן שווה בין הסעיפים.
- סך הנקודות במבחן הוא 107. ציון מעל 100 יעוגל ל-100.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לפתור. חלקו את זמנכם בתבונה!

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תיבדק.

ניתן לענות משני צידי הדף.

בהצלחה!

שאלה 1. (27 נק') תהי

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -9 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

- א. מצאו בסיס ומימד ל- $C(A)$ ול- $N(A)$.
- ב. מצאו בסיס ומימד ל- $C(A) + N(A)$ ול- $C(A) \cap N(A)$.
- ג. הוכיחו כי העמודה הרביעית של A^2 היא עמודת אפסים.

דף נוסף לשאלה מספר ____

דף נוסף לשאלה מספר ____

שאלה 2. (20 נק') יהי V מרחב וקטורי ממימד 4 מעל שדה \mathbb{F} , ויהי $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ בסיס של V . נגדיר תת-קבוצה $W \subseteq V$ באופן הבא: $w \in W$ אם הווקטורים $w, v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4$ ת"ל.

א. הוכיחו כי הווקטורים $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4$ בת"ל.

ב. הוכיחו כי W היא תת-מרחב וקטורי של V , ומצאו בסיס ומימד של W .

דף נוסף לשאלה מספר ____

דף נוסף לשאלה מספר ____

שאלה 3. (24 נק') יהי V מרחב וקטורי ממימד 4 מעל \mathbb{R} , ויהי $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ בסיס סדור של V . לכל $a \in \mathbb{R}$, תהי העתקה לינארית המקיימת $T_a: V \rightarrow V$

$$[T_a]_B = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & a-2 \\ a & a^2+a-2 & a-4 & -a-2 \\ a+1 & a^2+a & a-2 & -2 \\ 0 & a-2 & a-4 & a-2 \end{pmatrix}$$

- א. מצאו את כל ערכי הפרמטר $a \in \mathbb{R}$ שעבורם ההעתקה T_a היא חח"ע.
 ב. מצאו בסיס ומימד ל- $\ker T_0$ ול- $\text{Im } T_0$ (כאשר T_0 היא ההעתקה T_a עבור $a = 0$).
 ג. הוכיחו כי $C(\text{adj}([T_2]_B^B)) = N([T_2]_B^B)$ עבור T_a עבור $a = 2$.

דף נוסף לשאלה מספר ____

דף נוסף לשאלה מספר ____

שאלה 4. (18 נק') יהי \mathbb{F} שדה, ויהי $n \geq 2$.

א. תנו דוגמה למטריצות $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ שונות מאפס כך שלכל מטריצה $C \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מתקיים $\det(A + BC) \neq 1$.

ב. הוכיחו או הפריכו: לכל $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ שונות מאפס קיימות $C, D \in \mathbb{F}^{n \times n}$ שעבורן $\det(A + DBC) \neq 0$.

(שימו לב: בשני הסעיפים, המטריצות A, B שתיהן שונות ממטריצת האפס.)

דף נוסף לשאלה מספר ____

דף נוסף לשאלה מספר ____

שאלה 5. (18 נק') יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל \mathbb{F} , ויהיו $U, W \leq V$ תת-מרחבים כך ש- $W \subseteq U$.

א. הוכיחו: קיימת העתקה לינארית $T: V \rightarrow V$ שעבורה $\text{Im } T = U$ ו- $\text{Im } T^2 = W$.

ב. הוכיחו או הפריכו: קיימת העתקה לינארית $T: V \rightarrow V$ שעבורה $\text{Im } T = U$ ו- $\text{Im } T^2 = W$.

דף נוסף לשאלה מספר ____

דף נוסף לשאלה מספר ____