פתרון מבחן לדוגמה בקורס 83-118 תש"ף
מתמטיקה בדידה 2 (הנדסה)

מרצה: תומר באואר
מתרגל: אריאל ויצמן

הוראות יש לפתור את כל ארבע השאלות. לכל השאלות ניקוד זהה.

1. **משך המבחן** הוא שעתיים וחצי.
2. **חומר העזר** הוא פתוח, אך מודפס בלבד או שכתבתם בעצמכם. כלומר אין להשתמש בטלפון, במחשב או בכל אמצעי אלקטרוני אחר. הציגו למשגיחים את כל חומר העזר שלכם לפני תחילת המבחן.
3. **שימוש במחשבון** מדעי רגיל מותר. שוב, אסור שימוש בטלפון, במחשב או בכל אמצעי אלקטרוני אחר לחישובים.
4. כתבו את הפתרון לכל שאלה **בדף נפרד** ונמקו אותו היטב.
5. אפשר **לכתוב "לא יודעים"** בתור הפתרון לשאלה שלמה ולקבל 5 נקודות עבורו.
אפשרות זו תתקבל רק לפתרון שהוא ריק לחלוטין לשאלה שלמה (לא סעיף) פרט למילים "לא יודעים" וללא שום פתרון חלקי לידו.
6. כתבו בעט כחול או שחור באופן ברור.

עצות בכתיבה הנה כמה נקודות שכדאי לדעת כאשר אתם עונים על המבחן:

1. לחומר העזר ניתן להסתפק בדף הנוסחאות למבחן, ואפילו לא צריך מחשבון.

2. בכתיבת פתרון אתם צריכים להעביר את הידע שלכם מן הראש אל הדף. זה לא מספיק לדעת או להבין מה צריך להיות הפתרון לשאלות, אלא גם לתקשר את הידע וההבנה האלו.

3. חלקו את זמנכם בתבונה. נסו לעבור על כל השאלות ולכתוב טיוטה מהירה לרעיון הראשוני של דרך הפתרון, ואז כתבו פתרון מלא לשאלות שאתם יודעים לענות עליהן.

4. אנחנו לא קוראי מחשבות, ולכן אתם צריכים לכתוב את מה שאתם רוצים שנדע, ורק את מה שרלוונטי לפתרון. כתבו בכתב מסודר, עם משפטים מלאים ועם נימוקים והסברים לכל מה שדרוש נימוק או הסבר. כאשר משתמשים בביטויים כמו "קל לראות..."‏, "ברור ש..."‏, "מסיקים מייד כי..."‏, אז צריך להוכיח את הדברים האלו. זה הרי צריך להיות קל, ברור ומיידי.

5. לשאלה מסויימת יכולים להיות כמה פתרונות נכונים שונים. מצד שני, יכולים להיות לה גם הרבה פתרונות שגויים שונים. לפעמים אחד מהפתרונות הנכונים הוא יותר פשוט, או יותר קצר, או דומה למה שראינו בכיתה מאשר שאר הפתרונות. זה בסדר גמור לענות עם פתרון אחר, ובכל מקרה צריך להראות שהוא נכון ולא שגוי.

הצהרה

אשרו את ההצהרה הבאה בראש הדף הראשון:

אני מתחייב\ת לשמור על טוהר הבחינה, ומצהיר\ה שלא אשתמש בכל חומר אסור לשימוש בפתרונה. ידוע לי שהמרצה יכול להחליט לבחון את ידיעותיי בע"פ.

אישור הסטודנט\ית: ________________

1 שאלות

שאלה 1. יהי $n \geq 0$ שלם. חשבו את הסכום

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k}$$

פתרון. רוב הפתרונות נעזרים בנוסחת הבינום עבור חזקת n, ואז עושים שני "צעדים מקומיים".

הפתרון הראשון יעשה שימוש בסכומים מוכרים וההגדרה הרקורסיבית של עצרת. נוסיף למקדם הבינומי $\binom{n}{k}$ בסכום שני גורמים בהסתמך על כך שמתקיים

$$\begin{aligned}(n+2)! &= (n+2)(n+1) \cdot n! \\ (k+2)! &= (k+2)(k+1) \cdot k!\end{aligned}$$

לכל $n, k \in \mathbb{N}_0$. לכן:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \frac{(n+2)(n+1)}{(n+2)(n+1)} \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+2)(n+1)} \frac{(n+2)!}{(k+2)!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{(n+2)(n+1)} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+2)!}{(k+2)!((n+2)-(k+2))!} \\
&= \frac{1}{(n+2)(n+1)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+2}{k+2}
\end{aligned}$$

כעת לטיפול בסכום הפנימי נעזר בנוסחת הבינום של ניוטון $(1+1)^{n+2}$ עם $n+2$ גורמים

במכפלה ונפריד את שני המחוברים הראשונים:

$$\begin{aligned}2^{n+2} &= (1+1)^{n+2} = \sum_{k=0}^{n+2}\binom{n+2}{k}1^k 1^{n+2-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n+2}\binom{n+2}{k} = \binom{n+2}{0} + \binom{n+2}{1} + \sum_{k=2}^{n+2}\binom{n+2}{k}\\ &= 1+n+2+\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k+2}\end{aligned}$$

ולכן $\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k+2} = 2^{n+2}-n-3$. נציב זאת במשוואה הקודמת ונקבל

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k+2} = \frac{2^{n+2}-n-3}{(n+2)(n+1)}$$

לפתרון שני אפשר להעזר באינטגרל כפול של הפולינום:

$$\begin{aligned}(x+1)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\\ \int_0^1\int_0^t (x+1)^n dx\,dt &= \int_0^1\int_0^t\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k dx\,dt\end{aligned}$$

באגף שמאל נקבל

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^t (x+1)^n dx\,dt &= \int_0^1\left[\frac{1}{n+1}(x+1)^{n+1}\right]_0^t dt\\ &= \int_0^1\left(\frac{1}{n+1}(t+1)^{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)dt\\ &= \left[\frac{1}{(n+1)(n+2)}(1+t)^{n+2} - \frac{t}{n+1}\right]_0^1\\ &= \frac{2^{n+2}-1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n+1} = \frac{2^{n+2}-1-(n+2)}{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

ובאגף ימין נקבל

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^t\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k dx\,dt &= \sum_{k=0}^{n}\int_0^1\int_0^t\binom{n}{k}x^k dx\,dt\\ &= \sum_{k=0}^{n}\int_0^1\left[\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}x^{k+1}\right]_0^t dt\\ &= \sum_{k=0}^{n}\int_0^1\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}t^{k+1}dt\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k}t^{k+2}\right]_0^1 dt\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k}\end{aligned}$$

כאשר במעבר הראשון השתמשנו בכך שאינטרגל של סכום (סופי) הוא סכום האינטרגלים של המחוברים. נשווה את מה שקיבלו לשני האגפים עבור התוצאה הסופית:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k}=\frac{2^{n+2}-1-(n+2)}{(n+1)(n+2)}=\frac{2^{n+2}-n-3}{(n+2)(n+1)}$$

פתרון שלישי נוסף, דומה לקודם, הוא עם אינטגרל לא מסויים והצבת $x=1$. נחשב

$$\iint(x+1)^n dx\,dx=\int\frac{1}{n+1}(x+1)^{n+1}dx=\frac{1}{(n+2)(n+1)}(x+1)^{n+2}$$

ולפי נוסחת הבינום של ניוטון:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(n+2)(n+1)}(x+1)^{n+2}\\
&=\frac{1}{(n+2)(n+1)}\sum_{k=0}^{n+2}\binom{n+2}{k}x^k\\
&=\frac{1}{(n+2)(n+1)}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k}x^k+\binom{n+2}{n+1}x^{n+1}+\binom{n+2}{n+2}x^{n+2}\right]\\
&=\frac{1}{(n+2)(n+1)}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k}x^k+(n+2)x^{n+1}+x^{n+2}\right]\\
&=\frac{1}{(n+2)(n+1)}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+2)(n+1)}{(n+2-k)(n+2-k-1)}\binom{n}{k}x^k+(n+2)x^{n+1}+x^{n+2}\right]\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n+2-k)(n+2-k-1)}\binom{n}{k}x^k+\frac{(n+2)x^{n+1}+x^{n+2}}{(n+2)(n+1)}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+2)(k+1)}\binom{n}{n-k}x^k+\frac{(n+2)x^{n+1}+x^{n+2}}{(n+2)(n+1)}
\end{aligned}$$

כאשר פתחנו את המקדם הבינומי $\binom{n+2}{k}$ והצגנו אותו ככפולה של $\binom{n}{k}$. במעבר האחרון החלפנו את k ב-$n-k$, ועכשיו נשתמש בסימטריה של המקדמים הבינומיים $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ ובהצבה $x=1$:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+2)(k+1)}\binom{n}{k}1^k=\frac{(1+1)^{n+2}}{(n+2)(n+1)}-\frac{(n+2)1^{n+1}+1^{n+2}}{(n+2)(n+1)}=\frac{2^{n+2}-n-3}{(n+2)(n+1)}$$

שאלה 2. מצאו, כביטוי ב-n, כמה פתרונות בשלמים קיימים למשוואה

$$2x_1+10x_2+x_3=n$$

תחת ההגבלות (כולן יחד):

$$x_1\geq 1,\qquad x_2\geq 0,\qquad 9\geq x_3\geq 0$$

פתרון. נבנה פונקציה יוצרת בנפרד לכל משתנה. למשתנה x_1 נגדיר את

$$a(x)=x^2+x^4+x^6+\cdots=\frac{x^2}{1-x^2}$$

כי למשוואה $2x_1 = n$ יש רק פתרון אחד לכל $n > 0$ זוגי. באופן דומה

$$b(x) = 1 + x^{10} + x^{20} + \cdots = \frac{1}{1 - x^{10}}$$

עבור x_2 כי יש פתרון יחיד למשוואה $10x_2 = n$ בדיוק כאשר $n \geq 0$ הוא כפולה של 10. עבור x_3 נגדיר את הפולינום

$$c(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^9 = \frac{1 - x^{10}}{1 - x}$$

כי שוב יש רק פתרון יחיד למשוואה $x_3 = n$ אם $9 \geq n \geq 0$ ואין פתרון אחרת. כעת נגדיר את הפונקציה היוצרת

$$f(x) = a(x)b(x)c(x) = \frac{x^2(1 - x^{10})}{(1 - x^2)(1 - x^{10})(1 - x)} = \frac{x^2}{(1 + x)(1 - x)^2}$$

שהיא הפונקציה היוצרת של מספר הפתרונות למשוואה בשאלה, לפי עקרון הכפל של פונקציות יוצרות. עם מעט עבודה נקבל פירוק לשברים חלקיים

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{A}{(1 + x)} + \frac{B}{(1 - x)} + \frac{C}{(1 - x)^2} \\ &= \frac{A(1 - x)^2 + B(1 + x)(1 - x) + C(1 + x)}{(1 + x)(1 - x)^2} \\ &= \frac{(A + B + C) + (-2A + C)x + (A - B)x^2}{(1 + x)(1 - x)^2} \end{aligned}$$

ונשווה את המונה הזה למונה של $f(x)$ שקיבלנו קודם:

$$x^2 = (A + B + C) + (-2A + C)x + (A - B)x^2$$

כך שמהשוואת המקדמים של הפולינום נקבל מערכת משוואות לינארית

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ -2A + C &= 0 \\ A - B &= 1 \end{aligned}$$

שקל לפתור. הרי $B = A - 1$ לפי המשוואה השלישית, $C = 2A$ לפי המשוואה השנייה והצבה של שני הנתונים האלו במשוואה הראשונה היא

$$\begin{aligned} A + A - 1 + 2A &= 0 \\ 4A &= 1 \end{aligned}$$

ולכן $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{3}{4}$ ו-$C=\frac{1}{2}$. לכן

$$f(x)=\frac{1}{4(1+x)}-\frac{3}{4(1-x)}+\frac{1}{2(1-x)^2}$$

כך נוכל למצוא את המקדם $[x^n]f(x)$, שהוא מה שרצינו

$$[x^n]f(x)=\frac{1}{4}(-1)^n-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}(n+1)$$

פתרון אחר: נמצא את כל הפתרונות למשוואה שבהם $x_1\geq 1, x_2\geq 0, x_3\geq 0$ ונפחית מהם את הפתרונות שבהם $x_3\geq 10$. אז למעשה מחפשים את המקדם של x^n בפונקציה היוצרת

$$\frac{x^2}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^{10}}\cdot\left(\frac{1}{1-x}-\frac{x^{10}}{1-x}\right)$$

וממשיכים בחישוב זהה למה שעשינו בפתרון הקודם.

שאלה 3. תהי מטריצה M מגודל $n\times n$ שרכיביה הם כל $[n^2]=\{1,2,3,\ldots,n^2\}$. כלומר כל איבר של $[n^2]$ מופיע בדיוק פעם אחת ב-M.

חשבו את מספר המטריצות N מגודל $n\times n$ שרכיביהן הם כל $[n^2]$ ושאינן מכילות אף שורה שזהה לאיזושהי שורה של M.

פתרון. נגדיר קבוצה אוניברסילית U להיות כל המטריצות בגודל $n\times n$ שרכיביהן הם כל $[n^2]$. למעשה מדובר על כל התמורות המלאות על $[n^2]$ ויש $(n^2)!$ כאלו. נגדיר n תת־קבוצות $A_1,\ldots,A_n$ של U לפי זה שבקבוצה A_i נמצאות כל המטריצות שיש להן שורה השווה לשורה ה-i של M. אז $|A_i|=n\cdot(n^2-n)!$ כי קודם נבחר את השורה השווה לשורה i של M, ויש n אפשרויות כאלו, ואז את שאר n^2-n האיברים של $[n^2]$ מסדרים בתמורה כלשהי. לכל $J\subseteq[n]$ נגדיר $A_J=\bigcap_{j\in J}A_j$. אם $|J|=k$, אז

$$|A_J|=\binom{n}{k}\cdot k!\cdot(n^2-kn)!=n^{\underline{k}}\cdot(n^2-kn)!$$

כי צריך לבחור אילו מבין n השורות יהיו שוות ל-k השורות של M ולסדר אותן בתמורה, ויש $n^{\underline{k}}$ אפשרויות כאלו, ואז את שאר n^2-kn האיברים של $[n^2]$ מסדרים בתמורה. כלומר יש תלות רק בגודל של J, אז לפי הנוסח המשלים לעקרון ההכלה וההדחה עם הסימון $\alpha_k=n^{\underline{k}}\cdot(n^2-kn)!$ נקבל שמספר המטריצות הדרוש הוא

$$\begin{aligned}\left|\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i\right| &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\alpha_k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k n^{\underline{k}}\cdot(n^2-kn)! \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^k\frac{n!}{(n-k)!}(n^2-kn)! \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}(n^{\underline{k}})^2(n^2-kn)! \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^2 k!(n^2-kn)!\end{aligned}$$

כאשר כל אחת משתי השורות האחרונות סבירה כנוסחה הסופית.

שאלה 4. יהי $n \in \mathbb{N}$, ונגדיר את גרף הקובייה $Q_n = (V, E)$. קבוצת הקודקודים שלו היא $V = \{0,1\}^n$, כלומר כל הסדרות הבינאריות $(a_1, \ldots, a_n)$ מאורך n. ישנה צלע בין שתי סדרות כאלו אם ורק אם הן נבדלות בקואורדינטה אחת.

1. (10 נק') מצאו את מספר הצלעות $|E|$ בגרף Q_n.
2. (15 נק') הוכיחו כי לכל $n > 3$ הגרף Q_n לא מישורי.
רמז: ציירו את הגרפים המישוריים Q_2 ו-Q_3 והסתכלו על הצלעות והפאות שלהם.

פתרון. למעשה משתמשים במשפט לחיצות הידיים, נוסחת אוילר לגרפים מישוריים והדרך שבה הוכחנו בהרצאה כי $K_{3,3}$ אינו מישורי.

1. הסדר של Q_n הוא
$$|V| = |\{0,1\}^n| = 2^n$$
לכל סדרה מאורך n יש n קואורדינטות, ולכן יש לכל סדרה n סדרות שנבדלות ממנה בדיוק בקואורדינטה אחת. כלומר Q_n הוא גרף n-רגולרי. נעזר במשפט לחיצות הידיים:
$$2|E| = \sum_{v\in Q_n}\deg(v) = \sum_{v\in Q_n} n = n|V| = n2^n$$
נחלק ב-2 ונסיק כי $|E| = n2^{n-1}$.

2. נניח בשלילה כי יש ל-Q_n ייצוג מישורי עבור $n > 3$ עם קבוצת הפאות F. כמו בהרצאה, נסמן לכל פאה $f \in F$ ב-t_f את מספר הצלעות החלות ב-f בייצוג מישורי כלשהו.
אפשר לשים לב כי Q_n הוא דו־צדדי, כאשר בצד אחד נמצאים כל הקודקודים שהם סדרות עם מספר זוגי של אחדות, ובצד השני כל הסדרות עם מספר אי זוגי של אחדות. הרי אין אפשרות שקודקודים באותו צד הם שכנים, כי הם נבדלים לפחות בשתי קואורדינטות. זה

מייד מראה שאין ב-Q_n מעגל מאורך 3, כי בהרצאה הוכחנו את הטענה שכל המעגלים בגרף דו־צדדי הם מאורך זוגי. לכן $t_f \geq 4$ לכל $f \in F$.
כל צלע משותפת לכל היותר לשתי פאות, לכן

$$2\,|E| \geq \sum_{f\in F} t_f \geq \sum_{f\in F} 4 \geq 4\,|F|$$

ולכן $|F| \leq \frac{1}{2}\,|E|$. הגרף Q_n הוא קשיר, כי אם שני קודקודים נבדלים ב-k קואורדינטות, אז יש בינהם מסלול באורך k שבו כל פעם משנים קואורדינטה אחת. לפי ההנחה הוא גם מישורי, אז הוא צריך לקיים את נוסחת אוילר לגרף קשיר ומישורי:

$$\begin{aligned} |V| - |E| + |F| &= 2 \\ |V| - |E| + \frac{1}{2}\,|E| &\geq 2 \\ |V| &\geq \frac{1}{2}\,|E| + 2 \end{aligned}$$

אם נציב את מספר הקודקודים והצלעות שידועים לנו נקבל

$$\begin{aligned} 2^n &\geq n2^{n-2} + 2 \\ 0 &\geq n2^{n-2} - 2^n + 2 = 2^{n-2}(n-4) + 2 \end{aligned}$$

אם $n > 3$ טבעי, אז $n - 4 \geq 0$ ונקבל סתירה כי

$$2^{n-2}(n-4) + 2 > 0$$

הוא דווקא חיובי כי הוא סכום של מספר אי שלילי ו-2. לכן Q_n לא מישורי לכל $n > 3$.
תקציר לפתרון אחר שהוא יותר קצר, אך יותר מתוחכם: שמים לב כי Q_4 מכיל מינור שהוא $K_{3,3}$ שהוא כמובן לא מישורי, ולפי משפט וגנר Q_4 אינו מישורי. אפשר לבדוק זאת בציור. כל Q_n עבור $n \geq 4$ מכיל את Q_4 כמינור, ולכן גם הוא לא מישורי.