

# 83-116 מתמטיקה בדידה – תרגיל 9 פתרון

לציין בפתרון המוגש: שם מלא, ת.ז ויום של התרגול אליו אתם באים

## שאלה 1 תארו בצורה רקורסיבית את הסדרות הבאות:

א. המספרים הטבעיים  $\mathbb{N}$

$$a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + 1$$

ב. השלמים השליליים הזוגיים

$$a_1 = -2, \quad a_n = a_{n-1} - 2$$

ג.  $3, 3^2, 3^3, 3^4, \dots$

$$a_1 = 3, \quad a_n = 3a_{n-1}$$

ד.  $0!, 1!, 2!, 3!, 4!, \dots, k!, \dots$

$$a_0 = 0! = 1, \quad a_n = na_{n-1}$$

## שאלה 2

א. חיידק מתחלק שעה לאחר היווצרו לשני חיידקים (הוא מתחלק ל-2 חדשים ולא נשאר בעצמו). כל חיידק "חדש" מתנהג באופן דומה. יהי  $a(n)$  מספר החיידקים לאחר  $n$  שעות כאשר בהתחלה יש חיידק בודד. מצא נוסחת נסיגה ל- $a(n)$

ב. נניח שמדובר בחיידקים: כל חיידק בן שעה מוליד עוד 2 חיידקים (ואז חי לו עד סוף הימים...) יהי  $b(n)$  מס' החיידקים לאחר  $n$  שעות כאשר בהתחלה יש חיידק בודד.

א. לאחר שעה יהיו 2 חיידקים  $a(1) = 2$ . בשעה  $n$  כל החיידקים משעה  $n-1$  יתפצלו ולכן יהיו  $a(n) = 2a(n-1)$  חיידקים.

ב. לאחר שעה יהיו 3 חיידקים (המקורי ו-2 חדשים) לאחר שעתיים 2 הילדים מהדור הראשון הולידו כל אחד 2 ילדים חזרים ולכן  $b(1) = 3$ ,  $b(2) = 7$ . בשעה  $n$  רק חיידקים קטנים (בני שעה) יולידו. כלומר רק אלו שהתווספו בשעה  $n-1$  שזה בדיוק:  $b(n-1) - b(n-2)$  ולכן סכ"ה  $b(n) = 2(b(n-1) - b(n-2)) + b(n-1)$

### שאלה 3

מצא נוסחה רקורסיבית למס' הדרכים לחלק קבוצה בת  $2n$  איברים ל  $n$  זוגות. נסמן ב  $a_n$  את מס' הדרכים לחלק כך קבוצה בת  $2n$  איברים. ברור ש  $a_1 = 1$  ניקח את האיבר האחרון, יש לנו  $2n - 1$  דרכים לבחור לו בן זוג. ואז נשאר לנו לחלק את כל השאר ל  $n - 1$  זוגות. זו בחירה בשלבים ולכן:

$$a_n = (2n - 1)a_{n-1}$$

### שאלה 4

מצא נוסחת נסיגה לבעיה: כמה מילים יש באורך  $n$  מעל הא"ב  $\{1,2,3\}$  שאין בהן את הרצפים 11 ו- 23 ?

מילה חוקית כזו יכולה להתחיל ב-

- להתחיל ב3 ואז ההמשך זה מילה חוקית באורך  $n-1$
  - להתחיל ב2 ואז מילה חוקית מאורך  $n-1$  שלא מתחילה ב3 (שימו לב שיש  $a_{n-2}$  מילים חוקיות באורך  $n-1$  שכן מתחילות ב3)
  - להתחיל ב13 ואז מילה חוקית באורך  $n-2$
  - להתחיל ב12 ואז מילה חוקית באורך  $n-2$  שלא מתחילה ב3
- סכ"ה:

$$\begin{aligned} a_n &= (a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_{n-2}) + (a_{n-2} - a_{n-3}) \\ &= 2a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} \end{aligned}$$

$$a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 9 - 2 = 7, \text{ ותנאי ההתחלה:}$$

### שאלה 5

2 חברים פותחים תנועה חדשה שנפגשת כל שבוע. כל חבר ותיק (כלומר שכבר היה ב2 פגישות) חייב להביא עמו לכל פגישה משתתף חדש וכל משתתף חדש חייב לגייס לפגישה הבאה 2 חברים חדשים. בהנחה שכולם מצליחים בזה ואף אחד לא פורש, כמה חברים יהיו בתנועה בשבוע ה-  $m$  ?

נסמן את מס' החברים לאחר  $n$  שבועות (פגישות)  $m(n)$

$$\text{תנאי התחלה } m(0) = 0, m(1) = 2$$

לשבוע המי: כל מי שהיה בשבוע ה-2n מביא עוד חבר. מי שהצטרף בפגישה ה-1n (שזה מי שהיה בפגישה ה-1n אבל לא היה ב-2n) מביא 2 חברים.

אז יש  $m(n-2) + 2(m(n-1) - m(n-2))$  מגויסים חדשים

הם מצטרפים לותיקים וסכ"ה יש

$$m(n) = m(n-1) + m(n-2) + 2(m(n-1) - m(n-2))$$

## שאלה 6

קנגורו יכול לעשות צעד אחד, לדלג 2 צעדים או לקפוץ 4 צעדים. בכמה דרכים הוא יכול להתקדם למרחק של  $n$  צעדים?

נסמן את מס' הדרכים להגיע למרחק של  $n$  צעדים ב  $k(n)$

להגיע למקום החי הוא יכול ב-3 דרכים: בצעד בדילוג או קפיצה.

אם הוא עשה צעד אז למרחק ה-1n הוא יכל להגיע ב  $k(n-1)$  דרכים.

אם הוא עשה דילוג אז למרחק ה-2n הוא יכל להגיע ב  $k(n-2)$  דרכים.

אם הוא עשה קפיצה אז למרחק ה-4n הוא יכל להגיע ב  $k(n-4)$  דרכים.

$$\text{ולכן סכ"ה } k(n) = k(n-1) + k(n-2) + k(n-4)$$

תנאי התחלה  $k(1) = 1, k(2) = 2, k(3) = 3, k(4) = 4$  קלים לחישוב.

## שאלה 7

דוור סקרן פותח 6 מעטפות ומוציא את המכתבים שבתוכן. הדוור גם קצת שיכור והוא מחזיר את המכתבים למעטפות בלי לבדוק שמות (באופן אקראי). בכמה דרכים הוא יכול לעשות זאת כך שאף נמען לא יקבל את המכתב המקורי שיועד לו?

הוראות: השתמשו בנוסחא הרקורסיבית שלמדתם בכיתה ומצאו את כל האיברים על האיבר השישי.

למדתם את הנוסחא הרקורסיבית למס' התמורות של  $n$  איברים בלי נקודת

$$\text{שבת: } D(n) = (n - 1)(D(n - 1) + D(n - 2))$$

הדוור בעצם עושה תמורה למכתבים ואנו שואלים כמה תמורות כאלו הוא יכול לעשות בלי להחזיר מכתב למעטפה ממנה הוא בא- כלומר בלי נק' שבת.

$$\text{אז מחשבים: } D(1) = 0, D(2) = 1, D(3) = 2, \dots D(6) = 265$$