<u>הרצאה 6</u>

<u>מרחבים ווקטורים</u>

<u>הגדרה</u>

מרחב וקטורי הוא מבנה המורכב משדה $\mathbb{F}$ עם פעולות חיבור וכפל של שדה $+_{\mathbb{F}},\bullet_{\mathbb{F}}$ וקבוצה V שעליה מוגדרת פעולת חיבור $+_V$, כך של V יש אותן תכונות של שדה שאינן מערבות כפל. בנוסף, יש פעולה $\bullet_{\mathbb{F}V}$ של כפל סקלר בווקטור, שמקשרת בין המבנים.

יהא $\mathbb{F}$ שדה. קבוצה V עם פעולה $+_V$ (חיבור וקטורי) המוגדרת על V ופעולה $\bullet_{\mathbb{F}V}$ (כפל סקלרי) נקראת מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{F}$ אם מתקיימות התכונות הבאות:

1. מוגדרות החיבור. לכל $u,v\in V$ מתקיים $u+_v v\in V$.
2. קיבוץ. לכל $u,v,w\in V$ מתקיים $(u+_V v)+_V w=u+_V(v+_V w)$.
3. חילוף. לכל $u,v\in V$ מתקיים $u+_V v=v+_V u$.
4. איבר ניטרלי. קיים איבר $0_V\in V$ כך שלכל $v\in V$ מתקיים $v+_V 0_V=V$.
5. איבר נגדי. לכל $v\in V$ קיים $-v\in V$ כך ש $v+_V(-v)=0_V$.
6. תכונות הכפל הסקלרי:
   - א. מוגדרות. לכל $v\in V$ ו $\alpha\in\mathbb{F}$ מתקיים $\alpha\bullet_{\mathbb{F}V}v\in V$.
   - ב. קיבוץ. לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ ולכל $v\in V$ מתקיים $(\alpha\bullet_{\mathbb{F}}\beta)\bullet_{\mathbb{F}V}v=\alpha\bullet_{\mathbb{F}V}(\beta\bullet_{\mathbb{F}V}v)$.
   - ג. כפל יחידה. לכל $v\in V$ מתקיים $1\bullet_{\mathbb{F}V}v=v$.
   - ד. פילוג.
     - i. לכל $\alpha\in\mathbb{F}$ ולכל $u,v\in V$ מתקיים $\alpha\bullet_{\mathbb{F}V}(u+v)=\alpha\bullet_{\mathbb{F}V}u+\alpha\bullet_{\mathbb{F}V}v$.
     - ii. לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ ולכל $v\in V$ מתקיים $(\alpha+_{\mathbb{F}}\beta)\bullet_{\mathbb{F}V}v=\alpha\bullet_{\mathbb{F}V}v+\beta\bullet_{\mathbb{F}V}v$.

אברי הקבוצה V נקראים וקטורים, ואיברי השדה $\mathbb{F}$ נקראים סקלרים.

<u>תכונות המרחב הוקטורי</u>

1. לכל $\alpha\in\mathbb{F}$, $\alpha\vec{0}=\vec{0}$.
2. לכל $v\in V$, $\vec{0}v=\vec{0}$.
3. לכל $v\in V$ ולכל $\alpha\in\mathbb{F}$, $(-\alpha)v=-(\alpha v)$.
4. אם $\alpha v=\vec{0}$ אז $\alpha=0$ או $v=\vec{0}$.

<u>הוכחה</u>

1. $\vec{0}=\alpha\vec{0}-\alpha\vec{0}=\alpha(\vec{0}+\vec{0})-\alpha\vec{0}=(\alpha\vec{0}+\alpha\vec{0})-\alpha\vec{0}=\alpha\vec{0}+(\alpha\vec{0}-\alpha\vec{0})=\alpha\vec{0}+\vec{0}=\alpha\vec{0}$.
2. $\vec{0}=\vec{0}v-\vec{0}v=(\vec{0}+\vec{0})v-\vec{0}v=(\vec{0}v+\vec{0}v)-\vec{0}v=\vec{0}v+(\vec{0}v-\vec{0}v)=\vec{0}v+\vec{0}=\vec{0}v$.
3. $-(\alpha v)=\alpha(-v)\Leftarrow\alpha v+\alpha(-v)=\vec{0}\Leftarrow\vec{0}=\alpha\vec{0}+\alpha(v+(-v))=\alpha v+\alpha(-v)$.
4. נתון ש $\alpha v=\vec{0}$ נניח ש $\alpha\neq 0$ ונוכיח ש $v=\vec{0}$. מכיוון ש $\alpha\neq 0$ קיים לו איבר הופכי α^{-1}.
$v=1v=(\alpha^{-1}\alpha)v=\alpha^{-1}(\alpha v)=\alpha^{-1}\vec{0}=\vec{0}$.

<u>תרגיל</u>

יהא $\mathbb{R}^2$ עם פעולת חיבור וקטורים רגילה ז"א $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$.

בכל אחד מהסעיפים הבאים מוצעת הגדרה לכפל בסקלר. בדוק האם ההצעה אכן נותנת מרחב וקטורי.

א. $\alpha(x,y):=(\alpha x,y)$.

ב. $\alpha(x,y):=(\alpha^2 x,\alpha^2 y)$.

<u>פתרון</u>

א. לא מרחב וקטורי מכיוון שמצד אחד $(1+1)(x,y)=2(x,y)=(2x,y)$ ומצד שני $(1+1)(x,y)=1(x,y)+1(x,y)=(2x,2y)$.

ב. לא מרחב וקטורי מכיוון שמצד אחד $(1+1)(x,y)=2(x,y)=(4x,4y)$ ומצד שני $(1+1)(x,y)=1(x,y)+1(x,y)=(x,y)+(x,y)=(2x,2y)$.

<u>דוגמאות למרחבים וקטורים</u>

1. המרחב $\mathbb{F}^n$ - $\mathbb{F}^n$ מציין את הקבוצה של כל ה n-יות הסדורות של איברים ב $\mathbb{F}$.
נגדיר חיבור וקטורים והכפלה בסקלר ע"י

$$(a_1,a_2,...,a_n)+(b_1,b_2,...,b_n)=(a_1+b_1,a_2+b_2,...,a_n+b_n)$$

$$\alpha(a_1,a_2,...,a_n)=(\alpha a_1,\alpha a_2,...,\alpha a_n)$$

וקטור האפס ב $\mathbb{F}^n$ הוא n-ית האפסים, $0=(0,0,...,0)$.

הנגדי של וקטור מוגדר ע"י $-(a_1,a_2,...,a_n)=(-a_1,-a_2,...,-a_n)$.

2. מרחב הפולינומים $P_n(x)$. תהיי $P_n(x)$ קבוצת כל הפולינומים $a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ עם מקדמים a_i בשדה כלשהו $\mathbb{F}$. אזי $P_n(x)$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ביחס לפעולות הרגילות של חיבור פולינומים וכפל פולינום בקבוע.

3. מרחב הפונקציות $F(X)$. תהי X קבוצה לא ריקה כלשהיא ויהי $\mathbb{F}$ שדה שרירותי. נתבונן בקבוצה $F(X)$ של כל הפונקציות מ- X אל $\mathbb{F}$. הקבוצה $F(X)$ לא ריקה מכיוון ש X לא ריקה.

   סכום שתי פונקציות $f,g\in F(X)$ הוא הפונקציה $f+g\in F(X)$ המוגדרת ע"י $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ לכל $x\in X$.

   והמכפלה של סקלר $\alpha\in\mathbb{F}$ בפונקציה $f\in F(X)$ היא הפונקציה $\alpha f\in F(X)$ המוגדרת ע"י $(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$ לכל $x\in X$.

   $F(X)$ עם הפעולות הנ"ל היא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.

   ווקטור האפס ב $F(X)$ הוא פונקצית האפס אשר מעתיקה כל $x\in X$ אל $0\in\mathbb{F}$, כלומר, $0(x)=0$ לכל $x\in X$.

   עבור כל פונקציה $f\in F(X)$, הפונקציה $-f$ המוגדרת ע"י $(-f)(x)=-f(x)$ היא הנגדי של הפונקציה f.

תלות ליניארית

יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, ויהיו $v_1,...,v_n \in V$. צירוף ליניארי של $v_1,...,v_n$ הוא ביטוי מהצורה:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n \in V$$

כאשר כל $\alpha_i \in \mathbb{F}$. אם כל $\alpha_i = 0$, אז הצירוף הליניארי נותן $\vec{0}$ תמיד. לכן צירוף כזה נקרא טריויאלי. אנו מעוניינים בצירופים לא טריויאלים.

אם יש צירוף לא טריויאלי של $v_1,...,v_n$ שנותן $\vec{0}$, אנו אומרים ש $v_1,...,v_n$ תלויים ליניארית. אחרת, אומרים שהם בלתי תלויים ליניארית.

דוגמאות

א. נבדוק האם הווקטורים $(2,1,1),(1,2,2) \in \mathbb{R}^3$ תלויים ליניארית. יש לבדוק האם קיימים α, β כך ש $\alpha(2,1,1) + \beta(1,2,2) = (0,0,0)$.

נשים לב שיש פתרון יחיד למשוואה והוא $\alpha = \beta = 0$ ולכן אין צירוף לא טריויאלי שנותן $\vec{0}$ והווקטורים לא בת"ל.

דרך נוספת

נדרג את המטריצה $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{R_1 - 2R_2 \to R_2}{\approx} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ מכיוון שבצורה המדורגת אין שורת אפסים הווקטורים בת"ל.

ב.

נבדוק האם הווקטורים $(2,1,1),(1,2,2) \in \mathbb{Z}_3^3$ תלויים ליניארית. יש לבדוק האם קיימים α, β כך ש $\alpha(2,1,1) + \beta(1,2,2) = (0,0,0)$.

נשים לב שיש פתרון יחיד למשוואה והוא $\alpha = 1, \beta = 2$ ולכן יש צירוף לא טריויאלי שנותן $\vec{0}$ והווקטורים לא תלויים ליניארית.

דרך נוספת

נדרג את המטריצה $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{R_1 + R_2 \to R_2}{\approx} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ מכיוון שבצורה המדורגת יש שורת אפסים הווקטורים תלויים ליניארית.

ג.

האם הוקטורים
$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 + 3x + x^2 - 2x^3 - 3x^4 \\ f_2(x) &= 1 + 4x + 3x^2 - x^3 - 4x^4 \\ f_3(x) &= 2 + 3x - 4x^2 - 7x^3 - 3x^4 \\ f_4(x) &= 3 + 8x + x^2 - 7x^3 - 8x^4 \end{aligned}$$
ב $P_4(x)$ תלויים ליניארית מעל $\mathbb{R}$?

הערה

הפולינומים $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4, b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4$ שווים רק אם המקדמים שווים ז"א $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4$ רק אם מתקיים $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, a_4 = b_4$.

ז"א $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = 0$ רק אם $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0$ וזאת מכיוון שפולינום האפס הוא הפולינום $0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4$.

יש לבדוק האם קיים צירוף לא טריויאלי שמקיים

ז"א $\alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_2(x)+\alpha_3 f_3(x)+\alpha_4 f_4(x)=0$

$$\alpha_1\left(1+3x+x^2-2x^3-3x^4\right)+\alpha_2\left(1+4x+3x^2-x^3-4x^4\right)$$
$$+\alpha_3\left(2+3x-4x^2-7x^3-3x^4\right)+\alpha_4\left(3+8x+x^2-7x^3-8x^4\right)=0$$

ז"א יש לבדוק האם קיימים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ שעבורם מתקיים

$$\alpha_1(1,3,1,-2,-3)+\alpha_2(1,4,3,-1,-4)+\alpha_3(2,3,-4,-7,-3)+\alpha_4(3,8,1,-7,-8)=(0,0,0,0,0)$$

נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix}1&3&1&-2&-3\\1&4&3&-1&-4\\2&3&-4&-7&-3\\3&8&1&-7&-8\end{pmatrix}\overset{\substack{R_2-R_1\to R_2\\R_3-2R_1\to R_3\\R_4-3R_1\to R_4}}{\approx}\begin{pmatrix}1&3&1&-2&-3\\0&1&2&1&-1\\0&-3&-6&-5&3\\0&-1&-2&-1&1\end{pmatrix}\overset{\substack{R_3+3R_2\to R_3\\R_4+R_2\to R_4}}{\approx}\begin{pmatrix}1&3&1&-2&-3\\0&1&2&1&-1\\0&0&0&-2&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

קיבלנו שורת אפסים ולכן הוקטורים תלויים ליניארית.

<u>למה 1</u>

נניח ששניים או יותר וקטורים שונים מאפס $v_1,v_2,...,v_m$ תלויים ליניארית. אזי אחד הוקטורים הוא צירוף ליניארי של הוקטורים הקודמים, כלומר, קיים $k>1$ כך ש:

$v_k=c_1v_1+c_2v_2+...+c_{k-1}v_{k-1}$.

<u>הוכחה</u>

מכיוון שהוקטורים $v_1,v_2,...,v_m$ תלויים ליניארית, קיימים סקלרים $a_1,a_2,...,a_m$, לא כולם 0, כך ש $a_1v_1+a_2v_2+...+a_mv_m=0$. יהי k השלם הגדול ביותר כך ש $a_k\neq 0$ ז"א לכל $k<i$ $a_i=0$ ואז נקבל ש $a_1v_1+a_2v_2+...+a_kv_k+0v_{k+1}+...+0v_m=0$ ז"א $a_1v_1+a_2v_2+...+a_kv_k=0$.

אם $k=1$ אז נקבל ש $a_1v_1=0$ מכיוון ש $a_1\neq 0$ נקבל ש $v_1=0$ בסתירה לכך שכל הוקטורים שונים מאפס, ולכן $k>-1$. ו $v_k=-a_k^{-1}a_1v_1-...-a_k^{-1}a_{k-1}v_{k-1}$.

<u>דוגמא</u>

נתבונן בוקטורים

$$(1\ \ -2\ \ 3\ \ 4),(1\ \ 0\ \ 2\ \ -1),(5\ \ 2\ \ 3\ \ 4),(2\ \ 2\ \ 0\ \ 0),(1\ \ -1\ \ 2\ \ 3),(1\ \ -2\ \ 0\ \ 0)$$

הוקטורים תלויים ליניארית ומתקיים

$$1(1\ \ -2\ \ 3\ \ 4)+0(1\ \ 0\ \ 2\ \ -1)-1(5\ \ 2\ \ 3\ \ 4)+2(2\ \ 2\ \ 0\ \ 0)+0(1\ \ -1\ \ 2\ \ 3)+0(1\ \ -2\ \ 0\ \ 0)=0$$

כאשר הסקלרים הם $1,0,-1,2,0,0$ השלם הגדול ביותר שעבורו מתקיים $a_k\neq 0$ הוא $k=3$ ואז

$$1(1\ \ -2\ \ 3\ \ 4)+0(1\ \ 0\ \ 2\ \ -1)-1(5\ \ 2\ \ 3\ \ 4)+2(2\ \ 2\ \ 0\ \ 0)=0$$

ולכן

$$(2\ \ 2\ \ 0\ \ 0)=-\frac{1}{2}(1\ \ -2\ \ 3\ \ 4)-\frac{0}{2}(1\ \ 0\ \ 2\ \ -1)+\frac{1}{2}(5\ \ 2\ \ 3\ \ 4).$$

<u>המרחב הנפרש</u>

יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, ותהי $\phi\neq S\subseteq V$ קבוצה כלשהי. הנפרש של S הוא אוסף כל הצירופים הליניאריים של איברים מ S (מסומן: $span(S)$, או $sp(S)$). מסמנים גם $span(\phi)=\{\vec{0}\}$.

אם $span(S)=V$ אומרים ש S פורשת את V. אם יש קבוצה סופית S שפורשת את V, אומרים ש V מרחב נוצר סופית.

<u>תרגיל</u>

בכל אחד מהסעיפים הבאים, בדוק האם הנפרש שווה לקבוצה המושווית אליו.
אם כן, בטא איבר כללי של הקבוצה באמצעות הוקטורים הנתונים.
אם לא, מצא איבר שנמצא בקבוצה ולא בנפרש.

א. $\mathbb{R}^3 \overset{?}{=} span\left\{(2,0,4),(0,1,0),(6,5,12)\right\}$.

ב. $P_3(x) \overset{?}{=} span\left\{1, x+x^2, x^2+4x^3, 2x\right\}$.

<u>פתרון</u>

א. נראה ש $(1,0,0) \notin span\left\{(2,0,4),(0,1,0),(6,5,12)\right\}$.

צריך להראות שאין פתרון למשוואה

$$a_1(2,0,4)+a_2(0,1,0)+a_3(6,5,12)=(1,0,0)$$

יש לפתור את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} 2a_1+0a_2+6a_3=1 \\ 0a_1+a_2+5a_3=0 \\ 4a_1+0a_2+12a_3=0 \end{cases}$$

נדרג את המטריצה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 12 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 12 & 0 \end{array}\right) \overset{R_3-2R_1\to R_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

מהשורה השלישית ניתן לראות שאין פתרון למערכת, ולכן $(1,0,0) \notin span\left\{(2,0,4),(0,1,0),(6,5,12)\right\}$ ו

$$\mathbb{R}^3 \neq span\left\{(2,0,4),(0,1,0),(6,5,12)\right\}$$

ב. איבר כללי ב $P_3(x)$ הוא מהצורה $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$.

יש לרשום את $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ כצירוף ליניארי של הקבוצה $\left\{1, x+x^2, x^2+4x^3, 2x\right\}$.

$$b_0\cdot 1+b_1\left(x+x^2\right)+b_2\left(4x^3+x^2\right)+b_3 2x=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$$

$$b_0=a_0$$

$$b_1+2b_3=a_1 \Rightarrow b_3=\frac{1}{2}a_1-\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{8}a_3$$

$$b_1+b_2=a_2 \Rightarrow b_1=a_2-\frac{1}{4}a_3$$

$$4b_2=a_3 \Rightarrow b_2=\frac{1}{4}a_3$$

$$a_0\cdot 1+\left(a_2-\frac{1}{4}a_3\right)\left(x+x^2\right)+\left(\frac{1}{4}a_3\right)\left(4x^3+x^2\right)+\left(\frac{1}{2}a_1-\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{8}a_3\right)2x$$

<u>טענה</u>

נניח ש $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ פורשת את V אז:

א. אם $w\in V$, $\{w,v_1,v_2,...,v_n\}$ תלויה ליניארית ופורשת את V.

ב. אם v_i הוא צירוף ליניארי של הוקטורים $v_1,v_2,...,v_{i-1}$ אזי $\{v_1,v_2,...,v_{i-1},v_{1+1},...,v_m\}$ פורשת את V.

הוכחה

א.

מכיוון ש $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ פורשת את V אז $V=span\{v_1,v_2,...,v_n\}$. נתון ש $w\in V$ ולכן $w\in span\{v_1,v_2,...,v_n\}$ ז"א קיימים סקלרים $a_1,a_2,...,a_n$ כך ש $w=a_1v_1+a_1v_2...+a_nv_n \Leftarrow w-a_1v_1-a_1v_2...-a_nv_n=0$ המקדם של w הוא 1 וקיבלנו צירוף לא טריוויאלי של $\{w,v_1,v_2,...,v_n\}$ שנותן אפס ולכן הקבוצה תלויה ליניארית.

יש להראות ש $V=span\{w,v_1,v_2,...,v_n\}$. נניח ש $u\in V$, נתון ש $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ פורשת ז"א קיימים סקלרים $a_1,a_2,...,a_n$ כך ש $u=a_1v_1+a_2v_2+...+a_nv_n$ ולכן $u=0\cdot w+a_1v_1+a_2v_2+...+a_nv_n$.

הראינו שאם $u\in V$ אז $u\in span\{w,v_1,v_2,...,v_n\}$ ולכן $V=span\{w,v_1,v_2,...,v_n\}$.

ב.

יהי $u\in V$. נתון ש $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ פורשת את V אז $V=span\{v_1,v_2,...,v_n\}$, $u\in V$ ולכן $u\in span\{v_1,v_2,...,v_n\}$ ז"א קיימים סקלרים $a_1,a_2,...,a_n$ כך ש $u=a_1v_1+a_1v_2...+a_nv_n$.

אם v_i הוא צירוף ליניארי של הוקטורים $v_1,v_2,...,v_{i-1}$ אז קיימים סקלרים $b_1,b_2,...,b_{i-1}$ כך ש $v_i=b_1v_1+b_2v_2...+b_{i-1}v_{i-1}$.

$$u=a_1v_1+a_1v_2...+a_{i-1}v_{i-1}+a_iv_i+a_{i+1}v_{i+1}+...a_nv_n=$$
$$a_1v_1+a_1v_2...+a_{i-1}v_{i-1}+a_i\left(b_1v_1+b_2v_2...+b_{i-1}v_{i-1}\right)+a_{i+1}v_{i+1}+...a_nv_n=$$
$$\left(a_1+a_ib_1\right)v_1+\left(a_1+a_ib_2\right)v_2...+\left(a_{i-1}+a_ib_{i-1}\right)v_{i-1}+a_{i+1}v_{i+1}+...a_nv_n$$

קיבלנו ש $u\in span\{v_1,v_2,...,v_{i-1},v_{1+1},...,v_m\}$, ולכן $V=span\{v_1,v_2,...,v_{i-1},v_{1+1},...,v_m\}$.

בסיס ומימד

למת ההחלפה של שטייניץ

נניח ש $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ פורשת את V, ונניח ש $\{w_1,w_2,...,w_m\}$ בלתי-תלויה ליניארית.

אזי $m\le n$ ו V נפרש ע"י קבוצה מהצורה $\{w_1,w_2,...,w_m,v_{i_1},...,v_{i_{n-m}}\}$.

הערה

בלמה החלפנו m מהוקטורים של הקבוצה הפורשת ב m וקטורים בלתי-תלויים והקבוצה שהתקבלה עדיין פורשת.

הוכחת הלמה

נניח שקיים $1\le i\le n$ כך ש $v_i=0$ מכיוון שהקבוצה V פורשת ו $v_i=0$ נקבל גם שהקבוצה $V\setminus\{v_i\}$ פורשת, ולכן מספיק להוכיח את המשפט במקרה שכל ה- v_i אינם 0.

נתון ש $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ פורשת את V, מהטענה הקודמת נקבל ש $\{w_1,v_1,v_2,...,v_n\}$ גם קבוצה פורשת וגם תלויה ליניארית. לפי למה 1 אחד מהוקטורים בקבוצה $\{w_1,v_1,v_2,...,v_n\}$ הוא צירוף ליניארי של הוקטורים הקודמים. וקטור זה לא יכול להיות w_1 (ראינו בהוכחת הלמה), ולכן קיים וקטור v_j שהוא צירוף ליניארי של $\{w_1,v_1,v_2,...,v_{j-1}\}$ ולפי הטענה הקודמת הקבוצה $\{w_1,v_1,v_2,...,v_{j-1},v_{j+1},...,v_n\}$ פורשת.

כעת נחזור על הטיעון עבור הווקטור w_2.

הקבוצה $\{w_1, v_1, v_2, ..., v_{j-1}, v_{j+1}, ..., v_n\}$ פורשת ולכן לפי הטענה הקודמת הקבוצה

$\{w_1, w_2, v_1, v_2, ..., v_{j-1}, v_{j+1}, ..., v_n\}$ תלויה ליניארית ופורשת על פי למה 1 קיים וקטור בקבוצה

$\{w_1, w_2, v_1, v_2, ..., v_{j-1}, v_{j+1}, ..., v_n\}$ שהוא צירוף ליניארי של הקודמים לו, בהוכחת הלמה ראינו שלא

ייתכן שזה הווקטור w_1, מכיוון שהקבוצה $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ בלתי תלויה ליניארית אז גם w_2 הוא לא צירוף

של הקודמים לו, ולכן קיים k כך ש v_k הוא צירוף ליניארי של הוקטורים הקודמים לו ולפי הטענה הקודמת

נקבל שהקבוצה $\{w_1, w_2, v_1, v_2, ..., v_{j-1}, v_{j+1}, ... v_{k-1}, v_k, ..., v_n\}$ פורשת.

נחזור על הטיעון m פעמים ונקבל שהקבוצה $\{w_1, w_2, ..., w_m, v_{i_1}, ..., v_{i_{n-m}}\}$ פורשת.

נוכיח ש $m \le n$.

נניח בשלילה ש $m > n$.

לאחר n צעדים מהתהליך הקודם נקבל שהקבוצה $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ פורשת ז"א w_{n+1} הוא צירוף ליניארי

של $w_1, w_2, ..., w_n$ בסתירה לכך ש $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ קבוצה בת"ל.

<u>דוגמא</u>

יהיו $A = \{(1,2,3),(4,5,6)\}$ ו $B = \{(8,10,12),(1,1,2),(1,0,2),(2,0,1)\}$ תת קבוצות של $\mathbb{R}^3$.

נשים לב שקבוצה A בת"ל וקבוצה B פורשת, ולכן הקבוצה

$B = \{(1,2,3),(8,10,12),(1,1,2),(1,0,2),(2,0,1)\}$ פורשת ותלויה ליניארי.

מכיוון שהקבוצה תלויה ליניארית קיים וקטור בקבוצה שהוא צירוף ליניארי של הקודמים לו

נשים לב ש $(1,0,2) = -\frac{2}{3}(1,2,3) - \frac{1}{6}(8,10,12) + 3(1,1,2)$ ולכן הקבוצה

$\{(1,2,3),(8,10,12),(1,1,2),(2,0,1)\}$ פורשת.

מכיוון שהקבוצה פורשת נקבל שהקבוצה $\{(4,5,6),(1,2,3),(8,10,12),(1,1,2),(2,0,1)\}$ תלויה

ליניארית ואז קיים וקטור שהוא צירוף ליניארי של הקודמים לו.

נשים לב ש $(8,10,12) = -2(4,5,6) + 0(1,2,3)$ ולכן הקבוצה

$\{(4,5,6),(1,2,3),(1,1,2),(2,0,1)\}$ פורשת.

<u>הגדרה</u>

יהא V מרחב וקטורי, ותהי $B \subseteq V$. B נקראת בסיס עבור V אם:

1. B בת"ל.
2. $span(B) = V$.

<u>הגדרה</u>

מרחב וקטורי V נקרא ממימד סופי n או n-מימדי, ומסומן ב- $\dim V = n$ אם ל V יש בסיס כזה עם n

איברים. הגדרה זו של המימד מוגדרת היטב לאור המשפט הבא

<u>משפט</u>

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי. אז לכל בסיס של V יש אותו מספר איברים.

<u>הוכחה</u>

נניח ש $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ בסיס של V והקבוצה B היא בסיס אחר של V.

מכיוון ש $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ בסיס אז $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ פורשת.

מכיוון שהקבוצה B בסיס אז היא בת"ל.

מהטענה הקודמת נקבל שבקבוצה B יש לכל היותר n וקטורים.

מכיוון ש $\{u_1,u_2,...,u_n\}$ בסיס אז $\{u_1,u_2,...,u_n\}$ בת"ל.
מכיוון שהקבוצה B בסיס אז היא פורשת.
מהטענה הקודמת נקבל שבקבוצה B יש לפחות n וקטורים.
סה"כ קיבלנו שבקבוצה B יש בדיוק n וקטורים.

<u>דוגמא</u>

הקבוצה $\{e_i\}_{i=1}^n$ היא פורשת את $\mathbb{F}^n$ ובת"ל ולכן בסיס של $\mathbb{F}^n$ והמימד של $\mathbb{F}^n$ הוא n.
הבסיס $\{e_i\}_{i=1}^n$ נקרא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$.

<u>הגדרה</u>

קבוצה בת"ל $B\subseteq V$ נקראת בת"ל מקסימאלית אם לכל $v\in V\setminus B$, $B\cup\{v\}$ תלויה ליניארית.
קבוצה פורשת $S\subseteq V$ נקראת פורשת מינימאלית אם לכל $v\in S$, $S\setminus\{v\}$ אינה פורשת.

<u>משפט</u>

יהא V מרחב וקטורי. אזי:
א. אם B קבוצה בת"ל מקסימאלית ב V, אז B פורשת ולכן בסיס.
ב. אם S קבוצה פורשת מינימאלית ב V, אז S בת"ל ולכן בסיס.

<u>הוכחה</u>

א. נניח ש $B=\{u_1,...,u_n\}$ קבוצה בת"ל מקסימאלית, יהי $v\in V$ צריך להוכיח ש $v\in span\{u_1,...,u_n\}$.

מכיוון ש B קבוצה בת"ל מקסימאלית ב V נקבל ש $\{u_1,...,u_n,v\}$ תלויה ליניארית ז"א קיים וקטור שהוא צירוף ליניארי של הקודמים לו. אם קיים $1\le k\le n$ כך ש u_k הוא צירוף ליניארי של הקודמים לו נקבל סתירה לכך שהקבוצה $B=\{u_1,...,u_n\}$ בת"ל, ולכן v צירוף ליניארי של הקודמים לו ז"א צירוף ליניארי של הוקטורים $\{u_1,...,u_n\}$ ולכן $v\in span\{u_1,...,u_n\}$.

ב. תהיי $S\subseteq V$ קבוצה פורשת. צריך להוכיח שאם $S=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ פורשת מינימאלית אז S בת"ל. נניח בשלילה ש S תלויה ליניארית לפי למה 1 קיים וקטור $u_k\in S$ שהוא צירוף ליניארי של הוקטורים הקדומים לו, ולפי הטענה הקודמת הקבוצה $S=\{u_1,u_2,...,u_{k-1},u_{k+1},...,u_n\}$ פורשת בסתירה למינימאליות.

<u>משפט</u>

יהא V מרחב וקטורי ממימד סופי, ונסמן $n=\dim(V)$. אזי כל קבוצה $B\subseteq V$ המקיימת שתיים מהתכונות הבאות, מקיימת גם את השלישית (ולכן היא בסיס):
א. $\#B=n$.
ב. B פורשת את V.
ג. B בת"ל

<u>הוכחה</u>

א+ב$\Leftarrow$ג

אם B לא פורשת מינימאלית אז קיים וקטור $v\in B$ כך שהקבוצה $B\setminus\{v\}$ פורשת.
נתון ש $\#B=n$ ולכן $\#(B\setminus\{v\})=n-1$.
$n=\dim(V)$ ז"א קיימת קבוצה S עם n איברים שהיא בסיס של V, ולכן S בת"ל.
קיבלנו ש S בת"ל, $B\setminus\{v\}$ פורשת ולפי למת ההחלפה נקבל ש $\#S\le\#(B\setminus\{v\})$.
קיבלנו סתירה ו B פורשת מינימאלית ז"א בסיס.

א+ג $\Leftarrow$ ב
אם B לא בת"ל מקסימאלית אז קיים וקטור $v \in V \setminus B$ כך שהקבוצה $B \cup \{v\}$ בת"ל.
נתון ש $\#B = n$ ולכן $\#\left(B \cup \{v\}\right) = n+1$.
$n = \dim(V)$ ז"א קיימת קבוצה S עם n איברים שהיא בסיס של V, ולכן S פורשת.
קיבלנו ש S פורשת, $B \cup \{v\}$ בת"ל ולפי למת ההחלפה נקבל ש $\#S \ge \#\left(B \cup \{v\}\right)$.
קיבלנו סתירה ו B בת"ל מקסימאלית ז"א בסיס.
ב+ג $\Leftarrow$ א
נובע ישירות מהגדרת בסיס ומימד.

<u>משפט</u>

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי ותהי $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ קבוצה של ווקטורים בלתי תלויים ליניארית ב V, אזי ניתן להרחיב את S לבסיס של V.

<u>הוכחה</u>

נניח ש $B = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ הוא בסיס של V. אזי B פורשת את V, ולכן
$S \cup B = \{u_1, u_2, \ldots, u_r, w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ פורשת את V.
אם $S \cup B$ בת"ל סיימנו. (ייתכן מצב כזה, למשל $u_i = w_i$ לכל $1 \le i \le r$)
אם $S \cup B$ קבוצה תלויה ליניארית קיים וקטור ב $S \cup B$ שהוא צירוף ליניארי של הקודמים לו.
מכיוון ש $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ בת"ל לא ייתכן שקיים k שעבורו u_k הוא צירוף ליניארי של הקודמים לו.
נמחק כל ווקטור שהוא צירוף ליניארי של הקודמים לו ונקבל קבוצה בלתי תלויה ליניארית מינימאלית שמכילה את S.

<u>תרגיל</u>

בדוק שהקבוצה הבאה בת"ל והשלם אותה לבסיס של $\mathbb{R}^5$:
$\left\{(1,2,3,4,5),(1,0,-1,-2,-2),(2,3,4,5,7)\right\}$.

<u>פתרון</u>

נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \underset{\substack{2R_1-R_3\to R_3 \\ R_1-R_2\to R_2}}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{2R_3-R_2\to R_3}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

לא קיבלנו שורת אפסים ולכן הקבוצה בת"ל
נוסיף את הוקטורים $(0,0,0,1,0),(0,0,1,0,0)$ ונקבל את הבסיס
$\left\{(1,2,3,4,5),(1,0,-1,-2,-2),(2,3,4,5,7),(0,0,0,1,0),(0,0,1,0,0)\right\}$.