4. אופרטורים בסדר 2; קיום של פרמטר טבעי; עקמומיות כוללת של עקומה

4.1. דוגמאות של אופרטורים סדר 2

עקומה $C \subset \mathbb{R}^2$ מוגדרת ע"י

$$F(x,y) = 0$$

הגדרה

אופרטור Laplace "שטוח" Δ_0 הוא

$$\Delta_0 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}$$

זאת אומרת

$$\Delta_0 \left(F(x,y)\right) = \frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}y^2}$$

$$\Delta_0 : C^2\left(\mathbb{R}^2\right) \to C^0\left(\mathbb{R}^2\right)$$

או

$$\Delta_0 : C^\infty\left(\mathbb{R}^2\right) \to C^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$$

סימונים

$$F_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \qquad F_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \qquad F_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

ולכן אפשר לכתוב

$$\Delta_0 F = F_{xx} + F_{yy}$$

דוגמה

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - r^2$$

אזי

$$F_{xx} = 2 \qquad F_{yy} = 2$$

$$\boxed{\Delta_0 F = 4}$$

דוגמה

$$F(x,y) = x^2 - y^2$$

$$F_{xx} = 2 \qquad F_{yy} = -2$$

לכן

$$\Delta_0 F = 0$$

$\Leftarrow F$ פונקציה הרמונית

הגדרה

אופרטור של Bateman-Reiss D_B הוא

$$D_B(F) = F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2$$

כלומר

$$D_B = \det \begin{bmatrix} 0 & F_x & F_y \\ F_x & F_{xx} & F_{xy} \\ F_y & F_{yx} & F_{yy} \end{bmatrix}$$

4.2. עקמומיות של עקומה בהצגה סתומה

$C_F = \{F(x,y)=0\}$ כאשר $C_F \subset \mathbb{R}^2$

משפט

תהי $p \in C_F$, נניח $\nabla F(p) \neq 0$.
אזי עקמומיות גאודזית של C_F בנקודה p היא

$$\boxed{k = \frac{|D_B(F)|}{|\nabla F|^3}}$$

הערה

חשוב להבחין בין עקמומיות במסגרת של עקומות(k) לעקמומיות במסגרת של משטחים(K).

דוגמה

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - r$$

$$C_F\left(F(x,y)=0\right)$$

$$F_x = 2x \qquad F_y = 2y \qquad F_{xx} = 2 \qquad F_{yy} = 2 \qquad F_{xy} = 0$$

$$D_B(F) = 2(2y)^2 + 0 + 2(2x)^2 = 8y^2 + 8x^2 = 8r^2$$

$$\nabla F = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$|\nabla F| = \sqrt{4x^2 + 4y^2} = 2r$$

$$k = \frac{|D_B F|}{|\nabla F|^3} = \frac{8r^2}{(2r)^3} = \frac{1}{r}$$

4.3. עקמומיות ונגזרת שנייה

משפט

תהי x_0 נקודה קריטית על $f(x)$.

נתבונן בגרף של f בנקודה $(x_0, f(x_0))$. אזי עקמומיות של גרף היא

$$k = |f''(x_0)|$$

הוכחה

פרמטריזציה של הגרף:

$$\alpha(t) = (t, f(t))$$

$$\alpha''(t) = (0, f''(t))$$

$$k \stackrel{?}{=} \|\alpha''(t)\| = |f''(x_0)|$$

נניח $F(x,y) = y - f(x)$.

$$C_F = \{F(x,y) = 0\}$$

$$F_x|_{x=x_0} = f'(x)|_{x=x_0} = 0$$

$$F_y = 1$$

$$F_{xx} = f''(x) \qquad F_{xy} = 0 \qquad F_{yy} = 0$$

$$D_B(F) = F_{xx}F_y^2 - 0 + F_{yy}F_x^2 = f''(x) \cdot 1 + 0 \cdot f'(x) = f''(x)$$

$$\nabla F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

$$k = \frac{|D_B(F)|}{|\nabla F|^3} = \frac{|f''(x)|}{\left(\sqrt{1 + (f'(x))^2}\right)^3}$$

בנקודה הקריטית $x = x_0$, $f'(x_0) = 0$, לכן

$$k = |f''(x_0)|$$

4.4 קיום של פרמטר "אורך הקשת"

משפט

נניח שעקומה $d(t)$ מקיימת $d'(t) \neq 0$ לכל $t \in [a,b)$. אזי קיימת פרמטריזציה במהירות יחידה של העקומה הגרומטרית C ביחס לפרמטר s:

$$s(t)\int_a^t \left\|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\tau}\right\| \mathrm{d}\tau$$

הוכחה

$s = s(t)$ פונקציה עולה. קיימת $t = t(s)$.

צריך להוכיח: $\alpha(t(s))$היא במהירות יחידה.

$$\beta(s) = \alpha \circ t(s)$$

לפי כלל השרשרת:

$$\beta'(s) = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{{}^{\mathrm{d}\alpha}/_{\mathrm{dt}}}{{}^{\mathrm{ds}}/_{\mathrm{dt}}} = ...$$

לפי המשפט היסודי של אינפי זה שווה

$$... = \frac{{}^{\mathrm{d}\alpha}/_{\mathrm{dt}}}{\|\alpha'(t)\|}$$

$$\boxed{\|\beta'(s)\| = 1}$$

$$v = \frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}t}$$

$$\beta' = \frac{v}{\|v\|}$$

לכן

$$\|\beta'\| = \frac{\|v\|}{\|v\|} = 1$$

4.5. עקמומיות ביחס לפרמטר שרירותי

משפט

ביחס לפרמטר שרירותי t, עקמומיות $k_\alpha(t)$ של עקומה רגולרית $\alpha(t)=(x(t),y(t))$ היא

$$k_\alpha(t)=\frac{|x'y''-y'x''|}{\left(x'^2+y'^2\right)^{3/2}}$$

במילים אחרות

$$|\alpha'(t)|=\sqrt{x'^2+y'^2}$$

לכן

$$k_\alpha=\frac{|x'y''-y'x''|}{|\alpha'|^3}$$

דוגמה

פרבולה $y=x^2$

$$\alpha(t)=\left(t,t^2\right)$$

$$x=t \qquad y=t^2$$

$$x'=1 \qquad y'=2t$$

$$x''=0 \qquad y''=2$$

$$|\alpha'|=\sqrt{x'^2+y'^2}=\sqrt{1+4t^2}$$

$$k_\alpha=\frac{|1\cdot 2-2t\cdot 0|}{\left(1+4t^2\right)^{3/2}}$$

$$k_\alpha(t)=\frac{2}{\left(1+4t^2\right)^{3/2}}$$

$$k_\alpha(0)=2$$

הפרבולה עקומה ביותר בראשית הצירים.

4.6. עקומות Jordan במישור ופרמטר θ

הגדרה

עקומת Jordan מיוצגת ע"י הפרמטריזציה

$$d : S^1 \to \mathbb{R}^2$$

$$[a, b) \to \mathbb{R}^2$$

$$\alpha(a) = \alpha(b)$$

כאשר α היא חד־חד ערכית ורציפה.
משפט Jordan אומר שעקומת Jordan מחלקת את המישור לשני חלקים.

בתור פונקציה מרוכבת

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$$

$C \subseteq \mathbb{C}$ עקומת Jordan.
נניח שקיימת פרמטריזציה רגולרית. אזי לפי משפט קיימת גם כן פרמטריזציה לאורך הקשת $\alpha(s)$:

$$\forall_s \left\| \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} \right\| = 1$$

נסמן $v(s) = d'(s)$, לכן $\boxed{v(s) = 1}$.

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$$

$$\boxed{v : [a, b] \to S^1 \subseteq \mathbb{C}}$$

$$s \in [a, b]$$

$$v(s) \in S^1$$

$$d\left(s\right)$$

$$v\left(s\right)=\alpha'\left(s\right)$$

$$v\left(s\right)=e^{i\theta}\left(s\right)$$

הערה

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}=ie^{i\theta(s)}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}$$

$$\left\|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right\|=\left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right|$$

4.7 ביטוי לעקמומיות באמצעות θ

משפט

עקמומיות $k_{\alpha}\left(s\right)$ של עקומה $\alpha\left(s\right)$(s במהירות יחידה) היא

$$k_{\alpha}\left(s\right)=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}$$

הוכחה

$$k_{\alpha}\left(s\right)=\left\|\alpha''\left(s\right)\right\|=\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\alpha'\left(s\right)\right)\right\|=\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}v\left(s\right)\right\|=\left|ie^{i\theta(i)}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right|$$

עקומות קמורות

הגדרה

עקומת Jordan היא קמורה(ממש) אם מתקיים אחד מן התנאים השקולים הבאים:

1. כל קטע המקשר נקודות פנימיות של C נמצא כולו בתוך C.
2. נתבונן בישר משיק ל־C בנקודה $p \in C$. אזי המשלים $C \setminus \{p\}$ נכלל באחד מן החצי־מישורים המוגדרים ע"י המשיק.

משפט

נניח שעקומת Jordan רגולרית היא קמורה ממש.
אזי העתקת Gauss:

$$v : [a,b] \to S^1$$

$$p \mapsto \alpha'(s)$$

$$p = \alpha(s)$$

אזי העתקת $v : C \to S'$ היא חד־חד ערכית ועל.

הוכחה

נתבונן בנקודות על C עם חלק מדומה y מינימלי ומקסימלי.
על פי משפט Rolle, בנקודות מקסימום ומינימום נקבל $\theta = 0$, $\theta = \pi$ על מעגל יחידה: $e^{i0} = 1$, $e^{i\pi} = -1$.
נניח $v = e^{i\theta}$. נסמן את הווקטור המאונך לו ב־$w = e^{i(\theta + \pi/2)}$. כלומר $\begin{matrix} v = a + ib \\ w = -b + ia \end{matrix}$.
נתבונן בפונקציה $f(s) = \langle \alpha(s), w \rangle$.
אזי מקסימום ומינימום של $f(s)$ מגדירות נקודות אם $v = e^{i\theta} = \alpha'(s)$:

$$\alpha'(s) = e^{i(-\theta)} = e^{i(\theta + \pi)}$$

$$f'(s_0) = 0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(f(s))\right|_{s=s_0} = 0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=s_0} \langle d(s), w_0 \rangle = 0$$

לפי לייבניץ

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}, w_0 \right\rangle + \langle \alpha, 0 \rangle = 0$$

$$\langle \alpha' (s_0) , w_0 \rangle = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} (fg) = f'g + fg'$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \langle f, g\rangle = \langle f', g\rangle + \langle f, g'\rangle$$

זה חד חד ערכי: נוכיח בשלילה: אם לא, קיימת $s_1 \neq s_2$ כאשר $v (s_1) = v (s_2)$, אבל אז הישר המשיק מכיל את שתיהן בניגוד לתנאי, לכן $s_1 = s_2$

4.8 עקמומיות כוללת של עקומת Jordan קמורה ממש

הגדרה

עקמומיות כוללת היא $\int_a^b k_\alpha (s) \, \mathrm{d}s$ (כאשר s עובר על אורך הקשת)

משפט

עקמומיות כוללת של כל עקומות Jordan קמורה היא 2π:

$$\boxed{\oint_C k_\alpha (s) \, \mathrm{d}} = 2\pi$$