אלגברה ליניארית 2 (88113) – פתרון בחינה (מועד ב')

פרופ' רון עדין

הפתרונות כאן מנוסחים בקיצור נמרץ.

בהצלחה!

.1

א. הגדירו: בסיס אורתונורמלי.

יהי V מרחב מכפלה פנימית (מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$). קבוצה $E=\{e_1,\dots,e_n\}\subseteq V$ נקראת <u>אורתונורמלית</u> אם אבריה הם וקטורי יחידה ניצבים זה לזה, כלומר אם

$$\langle e_i,e_j\rangle=\begin{cases}1, & \text{if } i=j\\ 0, & \text{if } i\neq j\end{cases}$$

<u>בסיס אורתונורמלי</u> הוא קבוצה אורתונורמלית שהיא גם בסיס.

ב. נסחו והוכיחו את המשפט לגבי תהליך גרם-שמידט.

.2 תהיינה $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצות ריבועיות <u>הפיכות</u>. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות, עם נימוקים מלאים:

א. $\det\left(ABA^{-1}B^{-1}\right)=1$.

<u>נכון</u>, בגלל כפליות $\det$: $\det(ABA^{-1}B^{-1})=\det(A)\det(B)\det(A)^{-1}\det(B)^{-1}=1$

ב. $\det\left(AB^t-BA^t\right)=0$.

<u>לא נכון</u>. למשל: $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \det(AB^t-BA^t)=\det\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=1$

(שימו לב: בדרך כלל $\det(M-N)\neq\det(M)-\det(N)$)

ג. $\det\left(I+AB\right)=\det\left(I+BA\right)$.

<u>נכון</u>, בגלל כפליות $\det$ וקומוטטיביות כפל סקלרים:

$$\det(I+AB)=\det(A(A^{-1}+B))=\det(A)\det(A^{-1}+B)=$$
$$=\det(A^{-1}+B)\det(A)=\det((A^{-1}+B)A)=\det(I+BA)$$

ד. $\det\left(AB^tA^tB\right)>0$.

<u>נכון</u>, בגלל $\det(A^t)=\det(A)$, כפליות $\det$, והעובדה שהריבוע של מספר ממשי שאינו אפס הוא חיובי:

$$\det(AB^tA^tB)=\det(A)\det(B^t)\det(A^t)\det(B)=\det(A)^2\det(B)^2>0$$

.3

א. הגדירו: $\operatorname{adj}(A)$ (הצמוד הקלאסי, או המטריצה הנלווית, של מטריצה A).

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. הצמוד הקלאסי $\operatorname{adj}(A)=(b_{ij})\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מוגדר ע"י: $b_{ij}=(-1)^{i+j}\det(A_{ji})$, כאשר המטריצה $A_{ji}\in\mathbb{F}^{(n-1)\times(n-1)}$ מתקבלת מ-A ע"י מחיקת שורה j ועמודה i.

ב. תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש-$\operatorname{adj}(A)\neq 0$. הוכיחו: $\operatorname{rank}(A)\geq n-1$.

אם המטריצה $\operatorname{adj}(A)\neq 0$ אז לפחות אחד מאבריה שונה מאפס, כלומר קיימים i, j כך ש-$\det(A_{ji})\neq 0$. לכן השורות של A_{ji} בת"ל, וגם $n-1$ השורות המתאימות של המטריצה A בת"ל (כי כל תלות ליניארית שלהן היא גם תלות ליניארית של שורות A_{ji}). קיבלנו $n-1$ שורות בת"ל ב-A, ולכן $\operatorname{rank}(A)\geq n-1$.

ג. לכל $n\ge 2$, תנו דוגמא של מטריצה $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש-$\operatorname{adj}(A)\neq 0$ וגם $\operatorname{rank}(A)=n-1$.
למשל המטריצה האלכסונית A שאברי האלכסון שלה הם $1,\dots,1,0$.

.4

א. עבור כל $a\in\mathbb{R}$ מצאו את כל הערכים העצמיים הממשיים של המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&a\\0&1&2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$$

הפולינום האופייני הוא $f_A(x)=(x-1)((x-2)^2-a)$, ולכן עבור $a\ge 0$ הע"ע הממשיים הם $1,2+\sqrt{a},2-\sqrt{a}$ (לא בהכרח שונים זה מזה), ואילו עבור $a<0$ הע"ע הממשי היחיד הוא 1.

ב. עבור אילו ערכי $a\in\mathbb{R}$, המטריצה A הנ"ל היא לכסינה (ניתנת ללכסון) מעל הממשיים? נמקו.
שלושת הע"ע (המרוכבים) של A שונים זה מזה עבור $a\neq 0,1$. אם $a\ge 0$ וגם $a\neq 0,1$ (כלומר $0<a<1$ או $a>1$) אז ל-A יש שלושה ע"ע ממשיים שונים, ולכן היא לכסינה מעל $\mathbb{R}$. אם $a<0$ אז יש ל-A שלושה ע"ע מרוכבים שונים, שרק אחד מהם ממשי, ולכן היא לכסינה מעל $\mathbb{C}$ אך לא מעל $\mathbb{R}$. עבור $a=0,1$ צריך לבדוק ישירות, ומקבלים שאז יש ל-A שני ע"ע ממשיים שונים שלאחד מהם יש ריבוי אלגברי 2 אבל ריבוי גאומטרי 1. לכן גם במקרים אלו A לא לכסינה מעל $\mathbb{R}$.
לסיכום: A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ רק עבור $0<a<1$ או $a>1$.

ג. עבור כל $a\in\mathbb{R}$, רשמו את צורת ז'ורדן של A מעל המרוכבים.

עבור $a\neq 0,1$: $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2+\sqrt{a}&0\\0&0&2-\sqrt{a}\end{pmatrix}$,

עבור $a=0$: $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$, ועבור $a=1$: $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

.5

א. נגדיר, עבור $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$, $w=(w_1,w_2)\in\mathbb{C}^2$:

$$f(z,w)=z_1\overline{w_1}+iz_1\overline{w_2}+iz_2\overline{w_1}+2z_2\overline{w_2}$$

הוכיחו: f איננה מכפלה פנימית על $\mathbb{C}^2$.
הוכחה: f לא הרמיטית. למשל: $z=(1,0),\ w=(0,1)\ \Rightarrow\ f(w,z)=i\neq\overline{i}=\overline{f(z,w)}$

ב. נגדיר, עבור $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, $y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$:

$$g(x,y)=2x_1y_1+4x_1y_2+4x_2y_1+8x_2y_2$$

האם g היא מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^2$? נמקו.
g איננה מכפלה פנימית. היא אמנם ליניארית במשתנה הראשון, סימטרית ומקיימת $g(x,x)=2x_1^2+8x_1x_2+8x_2^2=2(x_1+2x_2)^2\ge 0$, אבל איננה חיובית: $g(x,x)=0$ גם עבור $x=(2,-1)\neq(0,0)$, למשל.