מבוא לחוגים ומודולים - תרגול 11

תזכורת:

R תחום ראשי, M הוא מודול מעל R שנוצר סופית.

M הוא מהצורה $M_A = R^n / A \cdot R^n$ כאשר n = מספר היוצרים של M

ו- $A \in M_n(R)$ איזשהי מטריצה.

$A \sim B$ אם קיימות $P,Q \in GL_n(R)$ כך ש- $B = PAQ$.

טענה: $A \sim B \iff M_A \cong M_B$.

כל $A \in M_n(R)$ דומה למטריצה אלכסונית $\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$ כאשר $d_1 | d_2 | \dots | d_n$

נקבעים ביחידות (עד כדי חברות). זו הצורה האלכסונית קנונית של A.

$d_1, \dots, d_n$ נקראים הגורמים האינווריאנטים של A.

מסקנה:

כל מודול נוצר סופית M מעל R מתפרק למכפלה

$$M \cong R/\langle d_1 \rangle \times \dots \times R/\langle d_n \rangle$$

תרגיל:

יהי $R = \mathbb{Q}[x]$ ונתונה המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} x+1 & 2 & -6 \\ 1 & x & -3 \\ 1 & 1 & x-4 \end{pmatrix}.$$

ניקח $M = R^3 / A \cdot R^3$. הוכיחו כי $\langle (1-x)^2 \rangle \subseteq Ann(M)$.

פתרון:

נדרג את A לצורה אלכסונית קנונית כדי להבין מיהו המודול M.

$$A=\begin{pmatrix} x+1 & 2 & -6 \\ 1 & x & -3 \\ 1 & 1 & x-4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \longleftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & x & -3 \\ x+1 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & x-4 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - R_1]{R_2 \leftarrow R_2-(x+1)R_1} \begin{pmatrix} 1 & x & -3 \\ 0 & 2-x-x^2 & 3(x-1) \\ 0 & 1-x & x-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 \leftarrow C_3+3\cdot C_1]{C_2 \leftarrow C_2 - x\cdot C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-x-x^2 & 3(x-1) \\ 0 & 1-x & x-1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{R_2 \longleftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x-1 \\ 0 & (1-x)(x+2) & 3(x-1) \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3-(x+2)R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x-1 \\ 0 & 0 & -(x-1)^2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 + C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & -(x-1)^2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1^{=d_1} & 0 & 0 \\ 0 & x-1^{=d_2} & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)^{2\,=d_3} \end{pmatrix}$$

מ הצורה האלכסונית
קנונית

$$M \cong \underbrace{\mathbb{Q}[x]/_{\langle 1 \rangle}}_{\mathbb{Q}[x]} \times \mathbb{Q}[x]/_{\langle x-1 \rangle} \times \mathbb{Q}[x]/_{\langle (x-1)^2 \rangle} \cong$$

$$\cong \mathbb{Q}[x]/_{\langle x-1 \rangle} \times \mathbb{Q}[x]/_{\langle (x-1)^2 \rangle}$$

כעת נסמן f איבר כללי $.a = (f+\langle x-1 \rangle, g+\langle (x-1)^2 \rangle) \in M$

$$(1-x)^2 a = (\langle x-1 \rangle, \langle (x-1)^2 \rangle) = 0_M$$

לכן $.\langle (1-x)^2 \rangle \subseteq Ann(M)$

מודולים מעל $F[x]$

יהי F שדה, $V=F^n$ מרחב וקטורי מעליו, $T:V\to V$ העתקה לינארית המיוצגת ע"י מטריצה A.

המודול $V_T=V$ מעל $F[x]$ נוצר סופית ע"י n איברים. צז לזו קבוצה בוטל : אם $f_A(\lambda)$ הוא הפולינום המינימלי של A, אז

$$f_A(x)\cdot v=f_A(T)\cdot v=0\cdot v=0.$$

$F[x]$ תחום ראשי, לכן

$$V_T\cong F[x]^n/M_T F[x]^n$$

ומסתבר ש- $M_T=xI-A$.

דוגמה:

תהי $B=\begin{pmatrix}-1&-2&6\\-1&0&3\\-1&-1&4\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{Q})$. $V_B=\mathbb{Q}^3$ הוא מודול מעל $\mathbb{Q}[x]$ לפי B, וגם

$$V_B\cong \mathbb{Q}[x]^3/(xI-B)\,\mathbb{Q}[x]^3.$$

כמו תמיד, נרצה לנרמל את $xI-B$ כדי להציג את V_B כמכפלה של מודולים ציקליים

ראינו

$$xI-B\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&x-1&0\\0&0&(x-1)^2\end{pmatrix}$$

לכן

$$V_B\cong \underbrace{\mathbb{Q}[x]/\langle x-1\rangle}_{\text{מימד 1 מעל } \mathbb{Q}}\times\underbrace{\mathbb{Q}[x]/\langle (x-1)^2\rangle}_{\text{מימד 2 מעל } \mathbb{Q}}.$$

הערה:

אם $f(x)$ פולינום מדרגה n, אז המימד של $F[x]/_{\langle f(x)\rangle}$ מעל F הוא n.
$x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_0$

בדוגמה הקודמת, המימד של V_B מעל $\mathbb{Q}$ הוא 3, וזה אכן סכום המימדים של שני המרכיבים.

הערה:

$A,B\in M_n(R)$ נקראות דומות אם קיימת $P\in GL_n(R)$ כך ש- $B=PAP^{-1}$.

טענה:

A ו-B דומות $\Longleftrightarrow xI-A\sim xI-B \Longleftrightarrow$ הצורות הקנונית של $xI-A$ ושל $xI-B$ שוות (עד כדי חברות).

דוגמה:

נוכיח שהמטריצות $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ ו- $B=\begin{pmatrix}3&-4\\1&-1\end{pmatrix}$ דומות ב- $M_2(\mathbb{Q})$.

$$xI-A=\begin{pmatrix}x-1&-2\\0&x-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}2&1-x\\x-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-\frac{1}{2}(x-1)R_1}\begin{pmatrix}2&1-x\\0&\frac{1}{2}(x-1)^2\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\xrightarrow{C_2\leftarrow C_2-\frac{1}{2}(1-x)C_1}\begin{pmatrix}2&0\\0&\frac{1}{2}(x-1)^2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0\\0&(x-1)^2\end{pmatrix}$$

$$xI-B\longrightarrow\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0\\0&(x-1)^2\end{pmatrix}$$

כך נוכיח שהמטריצות דומות מעל $\mathbb{Q}$.

הערה:

נניח $F\subseteq K$ שדות. אם A ו-B דומות מעל F $\Longleftrightarrow$ הן דומות מעל K.

__הערה:__

אם $A\sim \begin{pmatrix} d_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & d_n\end{pmatrix}$ אז $d_1\cdots d_n \underset{\text{חברה}}{\sim} \det A$.

למה? אם $A\sim B$ אז $B=PAQ \Leftarrow$ $\det B=\underset{\text{הפיך}}{\det P}\cdot \det A\cdot \underset{\text{הפיך}}{\det Q}$

__הערה:__

אם ניקח $B\in M_n(F)$, $xI-B\sim\begin{pmatrix} d_1(x) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & d_n(x)\end{pmatrix}$, $d_1(x)|\dots|d_n(x)$,

אז הפולינום האופייני של B הוא $d_1(x)\cdots d_n(x)$, והמינימלי הוא $d_n(x)$.

__הגדרה:__

עבור $f(x)=x^n-a_{n-1}x^{n-1}-\dots-a_1x-a_0$, נגדיר את __המטריצה המלווה__ של $f(x)$ להיות

$$C_f=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0\\ 1 & \ddots & \vdots & a_1\\ & \ddots & 0 & \vdots\\ 0 & & 1 & a_{n-1}\end{pmatrix}.$$

הפולינום האופייני של C_f הוא $f(x)$.

אם נחשוב על C_f כהעתקה $C_f:F^n\to F^n$, ונסתכל על $V_{C_f}=F^n$ כמודול מעל $F[x]$, אז

$$V_{C_f}\cong F[x]^n/(xI-C_f)F[x]^n\cong F[x]/\langle f(x)\rangle$$

__דוגמאות:__

1. $V=\mathbb{Q}^2$, $A:V\to V$ כך ש- $V_A\cong \mathbb{Q}[x]/\langle x^2-x+2\rangle$. נסמן $f(x)=x^2-x+2$.

לפי ההגדרה, $C_f=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. לכן $V_{C_f}\cong F[x]/\langle x^2-x+2\rangle$.

זה מראה ש- $V_A \cong V_{C_f} \Leftarrow xI-A \sim xI-C_f \Leftarrow A$ דומה ל- C_f.

כי מעל $F[x]$ המודולים שנוצרו ע"י $xI-A$

[תזכורת: עבור $A \in M_n(F)$, $V_A = F^n$ כמודול מעל $F[x]$ עם הפעולה $x \cdot v = Av$
זה בעצם M_{xI-A}]

ב. $V = \mathbb{Q}^4$, $B : V \longrightarrow V$ כך ש- $V_B \cong \mathbb{Q}[x]/_{\langle x^2+4\rangle} \times \mathbb{Q}[x]/_{\langle x^2-2\rangle}$.

נסמן $f(x) = x^2-2$, $g(x) = x^2+4$. המטריצות המלוות הן

$$C_g = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_f = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

נסמן

$$C = C_f \oplus C_g = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

אז $V_B \cong \mathbb{Q}[x]/_{\langle g(x)\rangle} \times \mathbb{Q}[x]/_{\langle f(x)\rangle} \cong V_{C_f} \times V_{C_g} \cong V_C$, לכן
בהכרח B ו- C דומות.

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו שהמטריצות $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ דומות
מעל $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

<u>הוכחה:</u>

אפשר לדרג את המטריצות $xI-A$ ו- $xI-B$.

A היא המטריצה המלווה של x^3-1. לכן $V_A \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[x]/_{\langle x^3-1\rangle}$.

לגבי B אפשר לדרג ישירות.

$$xI-B=\begin{pmatrix} x-1 & -1 & 0\\ 0 & x-1 & -1\\ 0 & 0 & x-1\end{pmatrix}\xrightarrow{C_1\leftrightarrow C_2}\begin{pmatrix} -1 & x-1 & 0\\ x-1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & x-1\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2+(x-1)R_1}\begin{pmatrix} -1 & x-1 & 0\\ 0 & (x-1)^2 & -1\\ 0 & 0 & x-1\end{pmatrix}\xrightarrow{C_2\leftarrow C_2+(x-1)C_1}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & (x-1)^2 & -1\\ 0 & 0 & x-1\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\xrightarrow{C_2\leftarrow C_3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & (x-1)^2\\ 0 & x-1 & 0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & (x-1)^3\end{pmatrix}=$$

$$(x-1)^3 = x^3-\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{3}x^2+\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{3}x-1$$

מעל $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$$=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & x^3-1\end{pmatrix}$$

לכן גם $V_A \cong {}^{(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[x]}/_{\langle x^3-1\rangle} \cong V_B$. לכן A ו-B צמודות.

<u>הגדרה:</u>

הצורה הרציונלית קנונית של מטריצה $A\in M_n(F)$ היא מטריצת בלוקים $C_{d_1(x)}\oplus\cdots\oplus C_{d_k(x)}$ כאשר $d_1(x)|\ldots|d_k(x)$ הגורמים האינווריאנטים של $xI-A$ מעל $F[x]$.

<u>טענה:</u>

כל מטריצה צמודה לצורה הרציונלית קנונית שלה.

<u>מסקנה:</u>

$V_A\cong V_B \iff$ A ו-B צמודות $\iff$ יש להן אותה צורה רציונלית קנונית.

<u>תרגיל:</u>

קבעו האם המטריצות הבאות צמודות מעל $\mathbb{Q}$:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 14\\ 0 & 3 & -7\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 85\\ 1 & 4 & -30\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

__פתרון:__

אפשר לחשב ולהוכיח שלכולן יש את אותו פולינום אופייני $(x-2)^2(x-3)$.

לפולינום המינימלי של A,B,C יש שתי אפשרויות: $(x-2)(x-3)$

$(x-2)^2(x-3)$

קל לבדוק

$(C-2)(C-3)\neq 0$, $(B-2)(B-3)\neq 0$, $(A-2)(A-3)=0$.

במטריצה 3×3, אם הגורמים האינווריאנטים הם $d_1(x)|d_2(x)|d_3(x)$, אז

הפולינום האופייני הוא $d_1(x)\cdot d_2(x)\cdot d_3(x)$ והפולינום המינימלי הוא $d_3(x)$.

$$xI-A\sim\begin{pmatrix}1&&\\&x-2&\\&&(x-2)(x-3)\end{pmatrix}\qquad xI-B,\ xI-C\sim\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&(x-2)^2(x-3)\end{pmatrix}$$

לכן A לא דומה ל-B או ל-C, אבל B ו-C כן דומות.

__דוגמה:__

תהי

$$D=\begin{pmatrix}1&2&-4&4\\2&-1&4&8\\1&0&1&-2\\0&1&-2&3\end{pmatrix}$$

הפולינום האופייני שלה הוא $(x-1)^4$. לכן הפולינום המינימלי

של D צריך להיות מהצורה $(x-1)^k$ לאיזשהו $1\leq k\leq 4$!

$D-I\neq 0$, $\qquad (D-I)^2=0$

לכן הפולינום המינימלי הוא $(x-1)^2$.

מה יכולים להיות הגורמים האינווריאנטים של D?

$1, x-1, x-1, (x-1)^2$ או $1, 1, (x-1)^2, (x-1)^2$

אין ברירה אלא לדרג את $xI-D$ כדי לדעת מי האופציה הנכונה.
(רמז: האופציה הנכונה היא $(1,1,(x-1)^2,(x-1)^2)$.

תרגיל:

הוכיחו ש- A תמיד דומה ל- A^t.

הוכחה:

ניקח צורה אלכסונית קנונית

$$xI-A \sim \begin{pmatrix} d_1(x) & & \\ & \ddots & \\ & & d_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1(x) & & \\ & \ddots & \\ & & d_n(x) \end{pmatrix}^t \sim (xI-A)^t = xI-A^t$$

(השתמשנו בטענה שאם $A\sim B$ אז $A^t\sim B^t$.)

לכן A ו-A^t דומות.