פתרון תרגיל בית 11 מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב' תשפ"א

שאלה 1. מצאו את הצורות הרציונליות קנוניות של המטריצות הבאות מעל $\mathbb{Q}$:

א. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ב. $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & \frac{1}{3} \\ -3 & 2 & \frac{1}{3} \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

ג. $C = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 2 & 5 \\ -4 & -7 & 2 & 5 \\ -4 & -5 & 1 & 4 \\ -8 & -12 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.

פתרון.

א. נחשב:

$$xI - A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - xR_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & 1-x^2 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - xC_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & 1-x^2 \end{pmatrix} \to \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-x^2 \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - xR_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-x^2 \\ 0 & 0 & x-x^3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x-x^3 \end{pmatrix}$$

לכן הצורה הרציונלית קנונית היא $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = C_{x^3-x}$.

ב. תשובה בלבד: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = C_{x^3-1}$.

ג. תשובה בלבד: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = C_{x+1} \oplus C_{x^3+x^2+x+1}$.

שאלה 2. תהי $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$, ונתייחס ל-$V = \mathbb{Q}^3$ כמודול מעל $\mathbb{Q}[x]$ המושרה מ-A.

א. נרמלו את $xI - A$ (כלומר, מצאו צורה אלכסונית הדומה ל-A).

ב. מצאו $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ כך ש-V איזומורפי (כמודול מעל $\mathbb{Q}[x]$) ל-$\mathbb{Q}[x]/\langle f\rangle \times \mathbb{Q}[x]/\langle g\rangle$.

ג. מצאו את הצורה הרציונלית קנונית של A.

פתרון.

א. אפשר לעבוד עם שברים, אבל אפשר גם בהתחלה לייצר את 1 ולעבוד איתו בתור האיבר הקטן ביותר:

$$\begin{pmatrix} x-9 & -4 & -5 \\ 4 & x & 3 \\ 6 & 4 & x+2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 - C_3} \begin{pmatrix} x-4 & -4 & -5 \\ 1 & x & 3 \\ -x+4 & 4 & x+2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & x & 3 \\ x-4 & -4 & -5 \\ -x+4 & 4 & x+2 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & x & 3 \\ x-4 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & x-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - (x-4)R_1} \begin{pmatrix} 1 & x & 3 \\ 0 & -x^2+4x-4 & -3x+7 \\ 0 & 0 & x-3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x^2+4x-4 & -3x+7 \\ 0 & 0 & x-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-3 \\ 0 & -x^2+4x-4 & -3x+7 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x-3 & 0 \\ 0 & -3x+7 & -x^2+4x-4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x-3 & 0 \\ 0 & -2 & -x^2+4x-4 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow -R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & x^2-4x+4 \\ 0 & x-3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & (x-2)^2 \\ 0 & x-3 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}(x-2)^2 \\ 0 & x-3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - (x-3)R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}(x-2)^2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(x-2)^2(x-3) \end{pmatrix} \to$$

$$\to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x-2)^2(x-3) \end{pmatrix}$$

ב. אנחנו יודעים שמתקיים

$$V \cong \mathbb{Q}[x]/\langle (x-2)^2(x-3)\rangle \cong \mathbb{Q}[x]/\langle (x-2)^2\rangle \times \mathbb{Q}[x]/\langle x-3\rangle$$

(המעבר האחרון נכון ממשפט השאריות הסיני).

ג. $(x-2)^2(x-3) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$, לכן הצורה הרציונלית קנונית היא $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

שאלה 3. יהי F שדה. נתבונן במודול $M = F[x]^2/AF[x]^2$ מעל $F[x]$ כאשר $A = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$. מהו המימד של M כמרחב וקטורי מעל F?

פתרון. ננרמל את A ונקבל $\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. לכן

$$M \cong F[x]/\langle x\rangle \oplus F[x]/\langle 0\rangle \cong F \oplus F[x]$$

מכיוון ש-$F[x]$ הוא מרחב וקטורי ממימד אינסופי, אז גם M ממימד אינסופי.

שאלה 4. מיינו את כל מחלקות הצמידות של מטריצות מעל $\mathbb{Z}$ עם פולינום אופייני $(x-1)^3 \cdot (x^2+2x+2)\cdot(x+3)$.

פתרון. נמיין את הגורמים האינווריאנטים לפי האפשרויות לפולינום המינימלי:

- $(x-1)(x^2+2x+2)(x+3)$ – הגורמים האינווריאנטים של המטריצה חייבים להיות $x-1, x-1, (x-1)(x^2+2x+2)(x+3)$, והצורה הרציונלית קנונית היא

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & & & & 6 \\ & & 1 & & & 2 \\ & & & 1 & & -3 \\ & & & & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

- $(x-1)^2(x^2+2x+2)(x+3)$ – הגורמים האינווריאנטים של המטריצה חייבים להיות $1, x-1, (x-1)^2(x^2+2x+2)(x+3)$, והצורה הרציונלית קנונית היא

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & & & & & -6 \\ & 1 & & & & 4 \\ & & 1 & & & 5 \\ & & & 1 & & 1 \\ & & & & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

- $(x-1)^3(x^2+2x+2)(x+3)$ – הגורמים האינווריאנטים של המטריצה חייבים להיות $1, 1, (x-1)^3(x^2+2x+2)(x+3)$, והצורה הרציונלית קנונית היא

$$\begin{pmatrix} & & & & & 6 \\ 1 & & & & & -10 \\ & 1 & & & & -1 \\ & & 1 & & & 4 \\ & & & 1 & & 4 \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

שאלה 5. מצאו את כל מחלקות הצמידות של מטריצות 5×5 שהפולינום המינימלי שלהן הוא x^3-6x^2+9x-4.

פתרון. נמיין את האפשרויות לפי הגורמים האינווריאנטים, שבתורם מגדירים את מחלקות הצמידות לפי הצורה הרציונלית קנונית. הפולינום המינימלי מתפרק למכפלה $(x-1)^2(x-4)$. נמצא את הגורמים האינווריאנטים לפי הפולינום האופייני:

- $(x-1)^4(x-4)$ – האפשרויות הן:
  - $1, (x-1)^2, (x-1)^2(x-4)$.
  - $x-1, x-1, (x-1)^2(x-4)$.
- $(x-1)^3(x-4)^2$ – האפשרויות הן:

- $1, (x-1)(x-4), (x-1)^2(x-4)$.

- $(x-1)^2(x-4)^3$ – האפשרויות הן:
  - $x-4, x-4, (x-1)^2(x-4)$.

שאלה 6. תהי $A \in M_3(\mathbb{Z})$. נניח ש-$\mathbb{Q}^3/_{A\cdot\mathbb{Q}^3}$ איזומורפי ל-$\mathbb{Q}$ כמודולים מעל $\mathbb{Q}$. האם $\mathbb{Z}^3/_{A\cdot\mathbb{Z}^3}$ איזומורפי ל-$\mathbb{Z}$ כמודולים מעל $\mathbb{Z}$? הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית.

פתרון. התשובה היא לא. למשל, אפשר לקחת $A = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$. מתקיים $\mathbb{Q}^3/_{A\cdot\mathbb{Q}^3} \cong \mathbb{Q}$, אבל $\mathbb{Z}^3/_{A\cdot\mathbb{Z}^3} \cong \mathbb{Z} \oplus {}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}} \oplus {}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}}$.

שאלה 7. נניח שהמרחב הווקטורי V כמודול מעל $\mathbb{C}[x]$ הוא סכום ישר של מודולים ציקליים שהמאפסים שלהם הם $(x+1)^2, (x-1)(x^2+1)^2, x^4-1$. קבעו מיהם הגורמים האינווריאנטים ומיהם המחלקים הראשוניים המתאימים.

פתרון. לפי הנתון,

$$V \cong {}^{\mathbb{C}[x]}/_{\langle (x+1)^2 \rangle} \times {}^{\mathbb{C}[x]}/_{\langle (x-1)(x^2+1)^2 \rangle} \times {}^{\mathbb{C}[x]}/_{\langle x^4-1 \rangle}.$$

לפי משפט השאריות הסיני, אפשר לפרק כל אחד מהמודולים לפי המרכיבים הזרים. נקבל שהמחלקים הראשוניים הם

$$(x+1)^2, x-1, (x+i)^2, (x-i)^2, x+1, x-1, x+i, x-i.$$

כדי למצוא את הגורמים האינווריאנטים, צריך לסדר את המחלקים הראשוניים שחוזרים לפי החזקות שלהם, ולקרוא מהחזקות הגבוהות לנמוכות. הגורמים הם:

$$\begin{gathered} (x+1)^2, x+1 \\ x-1, x-1 \\ (x+i)^2, x+i \\ (x-i)^2, x-i \end{gathered}$$

לכן הגורמים האינווריאנטים הם $(x-1)(x+1)^2(x+i)(x-i)$ ו-$(x+1)(x-1)(x+i)(x-i)$.

שאלה 8. הוכיחו כי המטריצות הבאות צמודות מעל $\mathbb{Q}$, ומצאו מהי צורת ז'ורדן שלהן:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 & -7 \\ 3 & -8 & 15 & -13 \\ 2 & -4 & 7 & -7 \\ 1 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

(מותר להיעזר במחשב על מנת לחשב את הפולינום האופייני והמינימלי של A ו-B.)

פתרון. מבדיקה במחשב אפשר לגלות שהפולינום האופייני של המטריצות הוא $(x-2)(x-1)^3$ וכי זהו גם הפולינום המינימלי שלהן. לכן נקבל ש-A ו-B שתיהן צמודות למטריצה המלווה של הפולינום הזה, כלומר למטריצה

$$\begin{pmatrix} & & & -2 \\ 1 & & & 7 \\ & 1 & & -9 \\ & & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

לגבי צורת ז'ורדן, המחלקים הראשוניים הם $x-2, (x-1)^3$, ולכן צורת ז'ורדן היא

$$\begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 9. יהיו K, L, M, N מודולים מעל חוג R. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.
רמז: לטענות המקבילות עבור מרחבים וקטורים מעל שדה יש את אותן תשובות.

א. נניח $L, N, K \leq M$ תת־מודולים כך ש-$M = N \oplus K$. אז $L = (L \cap N) \oplus (L \cap K)$.

ב. נניח $N, K \leq M$ תת־מודולים כך ש-$M = N \oplus K$ ו-$N \leq L$. אז $L = (L \cap N) \oplus (L \cap K)$.

ג. אם $K \subseteq N$, $K + L = N + L$ וגם $K \cap L = N \cap L$, אז $K = N$.

ד. נניח $L, N, K \leq M$ תת־מודולים כך ש-$K + L = N + L$ וגם $K \cap L = N \cap L$, אז $K = N$.

פתרון.

א. הפרכה: ניקח את המודול $M = \mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$ ואת תת-המודולים $N = \{(x, 0) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$, $K = \{(0, x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ ו-$L = \{(x, x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$. מאלגברה לינארית, מתקיים $M = N \oplus K$, אבל $L \cap N = L \cap K = \{(0, 0)\}$ ולכן $L \neq (L \cap N) \oplus (L \cap K)$.

ב. הוכחה: ההכלה $\supseteq$ ברורה, לכן נוכיח רק $\subseteq$. יהי $x \in L$. אז אפשר לכתוב $x = n + k$ עבור $n \in N$ ו-$k \in K$. אבל אז $k = x - n \in L$, כי $N \leq L$, ומצד שני $n \in N = L \cap N$. לכן ההצגה $x = n + k$ מראה ש-$x \in (L \cap N) \oplus (L \cap K)$.

ג. הוכחה: נתונה ההכלה $K \subseteq N$. נוכיח $N \subseteq K$. יהי $n \in N$. אז $n = n + 0 \in N + L$, לכן אפשר לכתוב $n = k + l$ עבור $k \in K$ ו-$l \in L$. אבל $l = n - k \in N$, ולכן $l \in N \cap L$. מהנתון האחרון, $l \in K \cap L$, לכן $l \in K$, ונקבל $n = k + l \in K$.

ד. הפרכה: ניקח את אותה הדוגמה כמו בסעיף הראשון. אז $K + L = N + L = M$, וגם $K \cap L = N \cap L = \{(0, 0)\}$, אבל $K \neq N$.

בהצלחה!