

שפת הפולידרומים

פולידרום - מילה שאם קוראים אותה משמאל לימין או מימין לשמאל מקבלים אותו דבר.

abb - לא פולידרום. $abba$ - פולידרום.
בהינתן מילה, אנו רוצים להכריע האם היא פולידרום.

מכונת טיורינג שעושה את זה

כשאנו נמצאים על האות הראשונה, נמחק אותה (להראות שכבר בדקנו), וניכנס למצב ששומר אותה, הולך עד הסוף, ובודק אם היא נמצאת בסוף. אם כן, נמחק גם את האות האחרונה, ונעבור למצב שחוזר חזרה עד לאות הלא מחוקה הראשונה.

ומה אם היו לנו שני ראשים ושני סרטים?

מתחת לסרט יש לנו סרט עזר, שהוא ריק בהתחלה, ואפשר לכתוב עליו מה שאנחנו רוצים. לכל סרט יש ראש משלו, ושני הראשים מחוברים לאותו בקר.

הטבלה של המודל החדש נראית כך:

מצב	I \bar{q}	תוכן II	\bar{q} \bar{d}	פעולה I	II \bar{q}
q_0	-	-	q_{acc}	-	-
q_0	a	-	q_1	a	a
q_0	b	-	q_1	b	b
q_1	a	a	q_1	R	R
q_1	b	b	q_1	R	R
q_1	a	-	q_1	a	a
q_1	b	-	q_1	b	b
q_1	-	-	q_2	-	L
q_2	-	a	q_2	-	L
q_2	-	b	q_2	-	L
q_2	-	-	q_3	L	R
q_3	a	a	q_3	L	R
q_3	b	b	q_3	L	R
q_3	-	-	q_{ac}	-	-
q_3	a	b	q_{rej}	-	-
q_3	b	a	q_{rej}	-	-

הגדרה

מ"ט עם k סדרטים (מודל MT_k) הינה שביעיה $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{ac}, q_{rej})$ כאשר:

Q אוסף מצבים סופי

Σ א"ב קלט

Γ א"ב מכונה

$q_0 \in Q$ מצב התחלה

$q_{ac} \in Q$ מצב מאשר
 $q_{rej} \in Q$ מצב דוחה
 δ פונקציית מעברים

$$\delta : (Q - \{q_{ac}, q_{rej}\}) \times \Gamma^k \rightarrow Q \times (\Gamma \cup \{L, R\})^k$$

במודל MT_k מניחים סרטים אינסופיים בשני הכיוונים. הקלט בסרט הראשון, כל שאר הסרטים מתחילים ריקים.

האם הוספנו כוח חישובי?

האם המודל החדש חזק יותר או חלש יותר) מהמודל הבסיסי, מודל T ? האם קיימת שפה שאפשר להכריע או לקבל במודל MT_k ואי אפשר להכריע או לקבל במודל הבסיסי?

משפט

לכל k , המודלים T ו MT_k שקולים.

הוכחה

נוכיח שקילות בין MT_k ל B , וידוע ש T שקול ל B . נקבל ש MT_k שקול ל T .

כיוון ראשון - MT_k לא חלש מ B

תהי M מכונת טיורינג במודל B . נבנה M_k מ"ט במודל MT_k ששקולה ל M .
 אם $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{ac}, q_{rej})$ אזי $M_k = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{ac}, q_{rej})$.
 $\delta(q, \alpha_1, \dots, \alpha_k) = (p, \beta, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ אם $\delta(q, \alpha) = (p, \beta)$ ו $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \Gamma, q \in Q$.

כיוון שני - B לא חלק מ MT_k

$M_B = (Q_k, \Sigma, \Gamma_k, \delta_k, q_0^k, q_{ac}^k, q_{rej}^k)$ במודל MT_k - המכונה השחורה. נבנה $M_B = (Q_B, \Sigma, \Gamma_B, \delta_B, q_0^B, q_{ac}^B, q_{rej}^B)$ במודל B ששקולה ל M_k - המכונה האדומה.
 כדי לייצג פקודות של מודל B במודל MT_k , כל מצב ב Q_B יכיל את המצב המקורי מ Q_k , k אוגרים, ו k פעולות:

$$Q_B = Q_k \times \Gamma_k^k \times (\Gamma_k \cup \{L, R\})^k$$

כדי לייצג את כל הסרטים בסרט אחד, אפשר להגדיל את האלף בית, שכל משבצת תייצג מכפלה קרטזית של k משבצות.

כדי לייצג את ריבוי הראשים, נשמור את מיקום הראש על הסרט - נסיף לא"ב אפשרות לשים חץ מתחת לכל ראש - אם יש חץ, סימן שהראש נמצא שם. הראש האמיתי לא מייצג אף אחד מ k הראשים - הוא זז על הסרט בנפרד מהם, ומה שמייצג את הראשים של המכונה המקורית זה החץ על הסרט.

$$\Gamma_{\uparrow} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \uparrow \end{array} \middle| \alpha \in \Gamma_k \right\} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ \uparrow \end{array}, \begin{array}{c} \beta \\ \uparrow \end{array}, \bar{\uparrow}, \dots \right)$$

$$\Gamma_B = (\Gamma_k \cup \Gamma_{\uparrow})^k \cup \Sigma$$

בשביל לעשות צעד בודד המכונה האדומה צריכה לדעת מה יש בכל הסרטים של המכונה השחורה. נסרוק את הסרט וכל פעם שנמצא ראש, נשמור את הערך שלו בזיכרון(מצב). נדאג לכך שתמיד נתחיל מהחץ הכי שמאלי, ונזוז ימינה עד שנמלא את k המקומות. לאחר שמילאנו אותם, נרשום בזיכרון את המצב החדש, ולפי זה נמלא את הפעולות. אחרי זה נעבור שוב על הסרט ונבצע את הפעולות, ואז נחזור לחץ הכי שמאלי.

אם אוגר המצב מכיל את q_{ac} או את q_{rej} , עוברים ל q_{ac} או q_{rej} של Q_B .

פעולות M_B

1. אתחול

2. סימולציה צעד אחד צעד

- (א) סריקה משמאל לימין ומילוי האוגרים "תוכן I ", "תוכן II ", ...
 (ב) על סמך טבלת המעברים של M_k , עדכון האוגר "מצב מכונה" והאוגרים "פעולה I ", "פעולה II ", ... (ואיפוס אוגרי התוכן)
 (ג) סריקה מימין לשמאל וביצוע הפעולות.
 (ד) אם תוכן אוגר "מצב מכונה" הינו q_{ac}^k אזי M_B עוברת למצב q_{ac}^B . אם תוכן האוגר הינו q_{rej}^k אזי M_B עוברת למצב q_{rej}^B . אחרת, חזרה ל(a).

סרט דו מימדי

נניח שיש לנו סרט דו מימדי - בכל שלב אפשר ללכת למעלה, למטה, שמאלה או ימינה עד אינסוף. האם זה שקול למודל T ?
 הרעיון האינטואטיבי הוא להשתמש במודל MT_k , אבל זה בעיה - כי ב MT_k יש לנו מספר סופי של סרטים, ואילו כאן יש לנו אינסוף במימד y .
 כדי לסמלץ את המכונה החדשה במודל T , דבר ראשון נצטרך לייצג את הסרט הדו מימדי בתוך סרט חד מימדי. אפשר לייצג אותו באמצעות ספירלה.
 אנו זקוקים לדרך לזכור את המיקום שלנו. המיקום הוא בתוך סרט אינסופי, ולכן לא נוכל לזכור אותו במצב בשביל זה נוכל להשתמש במודל MT_k , ולהשתמש בסרטים הנוספים בתור זיכרון.
 כדי לשמור את המיקום בזיכרון, צריך דרך לייצג את המספר. אפשר לייצג אותו בצורה עשרונית או בצורה בינארית, אבל הכי פשוט לייצג אותו בצורה אונארית - מספר התאים בסרט שרשום בהם מספר מסויים זה המספר. ככה אפשר בקלות לבצע פעולות של חיבור, חיסור וכפל.

מכונה ללא קלט

נרצה לבנות מכונת טיורינג שלא תקבל קלט, ותרשום על סרט אחת את כל המילים בשפה, מופרדות ב#. יהיו לנו שני סרטים - סרט אחד עליו המכונה תכתוב את הפלט, וסרט אחר בו היא תשתמש לצרכים שלה.

דוגמה

מכונה שכותבת את כל המילים בשפה $\{a^*\} - \{\epsilon\}$:

מַצב	אָו	זיכרון	אָו דְבִי	פעולה פלט	אָו
q_0	-	-	q_1	-	a
q_1	-	a	q_1	-	R
q_1	-	-	q_2	-	L
q_2	-	a	q_2	a	a
q_2	a	a	q_2	R	L
q_2	-	-	q_2	#	-
q_2	#	-	q_1	#	R
q_1	#	a	q_1	#	R
q_1	#	-	q_1	R	a

הגדרה

מכונת טיורינג למנייה של שפות הינה מ"ט עם לפחות שני סרטים, כאשר בסרט הראשון סרט הפלט) המכונה יכולה לכתוב רק על רווחים ולא יכולה לזוז שמאלה. ובנוסף בסרט הראשון המכונה יכולה לכתוב רק אותיות מתוך $\Sigma \cup \{\#\}$.
 חישוב של מ"ט למנייה מתחיל כאשר כל הסרטים ריקים. עבור מילה $w \in \Sigma^*$, ומכונה M למנייה, נאמר כי M פולטת את w אם מאיזהשהו שלב והלאה בחישוב של M המילה w נמצאת בין שני #יות בסרט פלט של M .
 עבור שפה $L \subseteq \Sigma^*$ ומכונה M למנייה, נאמר כי M מונה את L אם לכל $Mw \in \Sigma^*$ פולטת את w אם $w \in L$.

הערות

- אם השפה אינסופית, אז לעולם לא נראה את כל השפה על הסרט, אבל כל מילה בשפה תופיע על הסרט בשלב מסוים.
- אין התחייבות על הסדר של המילים.
- אין התחייבות שכל מילה תופיע רק פעם אחת.

הגדרה

שפה L ניתנת למנייה אם יש מכונה M שמונה אותה.

משפט

שפה L ניתנת למנייה אמ"ם היא ניתנת לזיהוי.

הוכחה

כיוון ראשון: מנייה \Leftarrow זיהוי.

תהי M_E מכונה שמונה את L - המכונה השחורה. נבנה M_L שמזהה את L - המכונה האדומה.

המכונה האדומה תכלול את המכונה השחורה, וגם את סרט הקלט. ברגע שהמכונה השחורה פולטת מילה, המכונה האדומה בודקת אם המילה הזאת היא הקלט. אם כן, היא עוברת ל- q_{acc} . אחרת, היא ממשיכה להפיק מילים.