פתרון תרגיל בית 5

17 בדצמבר 2012

5.1.3 מצאו העתקה $\varphi : M \to N$ של מונואידים השומרת על הכפל אבל לא על היחידה.

פתרון יש שלל דוגמאות. נסמן $M = N = (\mathbb{N}, \cdot)$, מונואידים. נקבע העתקה כדלהלן: $\varphi(n) = 0$. ברור שלכל m, n מתקיים $\varphi(m \cdot n) = 0 = 0 \cdot 0 = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$ אבל היחידה של שני המונואידים היא 1, ומתקיים $\varphi(1) \neq 1$.[1] ■

5.1.5 כמה הומומורפיזמים יש

1. $\mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_{12}$?
2. $\mathbb{Z}_{20} \to S_3$?
3. $D_4 \to \mathbb{Z}_{16}$?

פתרון באופן כללי, הומומורפיזם נקבע באופן יחיד על ידי יוצרים. לכן בפתרון שאלה זו נתחיל בחיפוש קבוצת יוצרים. השלב הבא הוא קיום כל היחסים המאפיינים את התחום, בתוך התמונה. לכן אנו צריכים לדעת, לגבי כל סעיף, את הפרטים הבאים: קבוצת יוצרים של התחום; קבוצת יחסים של התחום. המטרה היא לוודא שכל יחס מקבוצה זו מתקיים גם על תמונת ההעתקה שלנו.

1. ניקח כקבוצת יוצרים של $\mathbb{Z}_{15}$ את $\{1\}$, עם היחס $15 \cdot 1 = 0$.[2] אנו מחפשים העתקות שתקיימנה (ב־$\mathbb{Z}_{12}$) את היחס $15 \cdot \varphi(1) = 0$. הסדר של איברי $\mathbb{Z}_{12}$ הוא 12, ולכן המשוואה שקולה למשוואה $3 \cdot \varphi(1) = 0$. לפיכך אנו מחפשים איברים (ב־$\mathbb{Z}_{12}$) שהם מסדר 3. האפשרויות הן $0, 4, 8$. לכן יש 3 הומומורפיזמים שונים:
   (א) $\varphi(n) = 0$.
   (ב) $\varphi(n) = 4n$.
   (ג) $\varphi(n) = 8n$.
2. נעבוד בדומה לסעיף 1. ניקח כקבוצת יוצרים של $\mathbb{Z}_{20}$ את $\{1\}$, עם היחס $20 \cdot 1 = 0$. אנו מחפשים העתקות שתקיימנה (ב־S_3) את היחס $(\varphi(1))^{20} = id$. ב־S_3 יש איברים מסדרים $1, 2, 3$, ומכיוון ש־3 איננו מחלק את 20, ברור שהפתרון

[1] כתרגיל, חישבו היכן השתמשנו כאן בעובדה שהקבוצות אינן חבורה: מפני מה בחבורה זה לא קורה?
[2] שימו לב לכך שהכתיב של החבורה הזו הוא חיבורי, ולכן כפל במספר שלם הוא חזרה על החיבור מספר פעמים.

איננו מסדר מחלק 3. נותרנו עם ארבעה פתרונות: $id,(1\,2),(1\,3),(2\,3)$. לכן יש ארבע אפשרויות, ועבור כל σ מהרשימה לעיל ההומומורפיזם המתאים הוא

$$\varphi(n)=\sigma^n=\begin{cases}\sigma & 2\nmid n\\ id & 2\mid n\end{cases}$$

3. נחזור על השיטה. ניקח כקבוצת יוצרים את σ, הסיבוב ב־90°, ואת τ, שיקוף. היחסים הם $\sigma^4=id$, $\tau^2=id$, ו־$\tau\sigma\tau=\sigma^{-1}$. לפיכך אנו מחפשים (ב־$\mathbb{Z}_{16}$) העתקות שתקיימנה את היחסים הבאים: $4\cdot\varphi(\sigma)=0$, $2\cdot\varphi(\tau)=0$, ו־$\varphi(\tau)+\varphi(\sigma)+\varphi(\tau)=-\varphi(\sigma)$. בהתחשב באבליות של $\mathbb{Z}_{16}$, הצבה של היחס השני בשלישי תתן את היחס $\varphi(\sigma)=-\varphi(\sigma)$, או את היחס $2\cdot\varphi(\sigma)=0$. כללו של דבר, עד כה דרשנו כי גם $\varphi(\sigma)$ וגם $\varphi(\tau)$ יהיו מסדר שמחלק את 2. יש שני איברים כאלה ב־$\mathbb{Z}_{16}$. אלה הם $0,8$. לכן יש לנו 4 אפשרויות:
   (א) לכל $\rho\in D_4$, $\varphi(\rho)=0$.
   (ב) $\varphi\left(\sigma^i\tau^j\right)=j\cdot 8$. $\varphi(\rho)=\begin{cases}8 & \rho\text{ is a reflection}\\ 0 & \rho\text{ is a rotation}\end{cases}$.
   (ג) $\varphi\left(\sigma^i\tau^j\right)=i\cdot 8$. על ידי שיכון של D_4 ב־S_4 כתמורה על קודקדים ניתן לקבל $\varphi(\rho)=\begin{cases}8 & \rho\notin A_4\\ 0 & \rho\in A_4\end{cases}$.
   (ד) $\varphi\left(\sigma^i\tau^j\right)=(i+j)\cdot 8$. בעזרת השיכון מהפתרון הקודם, נקבל

$$\varphi(\rho)=\begin{cases}8 & \rho\in\{(1\,2\,3\,4),(1\,4\,3\,2),(1\,2)(3\,4),(1\,4)(2\,3)\}\\ 0 & \rho\in\{id,(1\,3),(2\,4),(1\,3)(2\,4)\}\end{cases}$$

■

5.2.11 הוכיחו שהחבורה $\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}:a,b\in\mathbb{R},(a,b)\neq(0,0)\right\}$ עם פעולת כפל מטריצות היא איזומורפית ל־$\mathbb{C}^*$.

פתרון נשתמש בהעתקה $f(a+bi)=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$. קל לראות שזו העתקה מוגדרת היטב והפיכה. נותר להראות כי זהו הומומורפיזם. יהיו $a+bi,c+di\in\mathbb{C}^*$. אזי

$$\begin{aligned}f(a+bi)\cdot f(c+di) &= \begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & d\\ -d & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac-bd & ad+bc\\ -ad-bc & ac-bd\end{pmatrix}\\ &= f(ac-bd+(ad+bc)i)=f((a+bi)(c+di))\end{aligned}$$

אם כן זהו הומומורפיזם. כבר טענו כי ההעתקה היא הפיכה, ולכן זהו איזומורפיזם. ■

5.3.8 (נורמליות היא תורשתית) אם $N\le K\le G$ ו־N נורמלית ב־G, אז N נורמלית ב־K.

פתרון נתון כי $N\lhd G$, דהיינו לכל $g\in G$, $gN=Ng$. בפרט לכל $g\in K$, $gN=Ng$. לכן $N\lhd K$. ■

5.3.9 (נורמליות אינה טרנזיטיבית) מצאו חבורות $G \lhd K \lhd N$ כך ש־N אינה נורמלית ב־G.

פתרון לפי הצעתו של פרופ' וישנה, ניקח את החבורות הבאות:
$G = A_4$, $K = \{id, (1\,2)\,(3\,4)\,, (1\,3)\,(2\,4)\,, (1\,4)\,(2\,3)\}$, $N = \{id, (1\,2)\,(3\,4)\}$.
נראה כי $G \lhd K \lhd N$, אבל $N \ntriangleleft G$.
ראשית נראה $K \lhd G$. בחבורת סימטריה, הצמדה על ידי איבר אינה משנה את מבנה המחזורים של התמורה.[3] ב־K נמצאים כל התמורות ממבנה מחזורים $(--)\,(--)$, בנוסף לתמורת היחידה. אי־לכך, על ידי הצמדה אנו נקבל איבר ממבני מחזורים אלו, ויתקיים $K \lhd G$.
כעת נראה $N \lhd K$. משיקולי עוצמה מתקיים $[K : N] = 2$, ולכן, לפי תרגיל 5.3.7 (הוכחנו בכיתה) $N \lhd K$.
לסיום נראה $N \ntriangleleft G$. נצמיד את $(1\,2)\,(3\,4)$ על ידי $(1\,3)$. נקבל

$$(1\,3)\,(1\,2)\,(3\,4)\,(1\,3)^{-1} = (1\,3)\,(1\,2)\,(3\,4)\,(1\,3) = (1\,4)\,(2\,3)$$

אבל $(1\,4)\,(2\,3) \notin N$, ולכן $N \ntriangleleft G$. ■

5.3.11 תת־החבורה הנוצרת על־ידי ריבועי אברים היא נורמלית.

פתרון תהי G חבורה. נזכיר כאן כי עבור $a, b \in G$ מתקיים $ab^n a^{-1} = \left(aba^{-1}\right)^n$. ניתן להוכיח זאת על ידי פתיחת הסוגריים וצמצום איברים. נביט בתת־חבורה H הנוצרת על ידי $A = \left\{g^2 \mid g \in G\right\}$. איבר ב־$H$ הוא שרשור סופי של איברים ב־A. יהי $h = g_1^2 g_2^2 \cdots g_n^2 \in H$, ויהי $x \in G$. אזי

$$\begin{aligned} xhx^{-1} &= xg_1^2 g_2^2 \cdots g_n^2 x^{-1} = xg_1^2 \left(x^{-1}x\right) g_2^2 \left(x^{-1}x\right) \cdots \left(x^{-1}x\right) g_n^2 x^{-1} \\ &= \left(xg_1^2 x^{-1}\right)\left(xg_2^2 x^{-1}\right) \cdots \left(xg_n^2 x^{-1}\right) \\ &= \left(xg_1 x^{-1}\right)^2 \left(xg_2 x^{-1}\right)^2 \cdots \left(xg_n x^{-1}\right)^2 \end{aligned}$$

אם כן הראנו כי xhx^{-1} הוא שרשור סופי של ריבועי איברים ב־G, ולכן $xhx^{-1} \in H$.
■

5.3.13 לכל תת־חבורה $H \leq G$, החיתוך $\bigcap gHg^{-1}$ הוא תת־חבורה נורמלית של G. הראו שזוהי תת־החבורה הנורמלית הגדולה ביותר של G המוכלת ב־H.

פתרון לפי ניסוח השאלה, $\bigcap gHg^{-1}$ הוא תת־חבורה נורמלית. ברור כי היא מוכלת ב־H, אם נביט במקרה $g = 1$ למשל. נניח כי קיימת K תת־חבורה נורמלית של G המוכלת ב־H. מתקיים לכל $g \in G$, $K = gKg^{-1} \subseteq gHg^{-1}$. אם כן, לכל $g \in G$ מתקיים $K \subseteq gHg^{-1}$, ולכן $K \subseteq \bigcap gHg^{-1}$. לפיכך מצאנו כאן כי $\bigcap gHg^{-1}$ היא תת־החבורה הנורמלית הגדולה ביותר של G המוכלת ב־H. ■

5.3.14 נניח שבחבורה מתקיים, עבור n קבוע, $(ab)^n = a^n b^n$ לכל a, b. עבור מספר טבעי m, נסמן $G^m = \{g^m : g \in G\}$.

1. הוכיחו כי G^n, G^{n-1} הן תת־חבורות נורמליות של G.
2. כל אברי G^n מתחלפים עם כל אברי G^{n-1}.

[3] זהו משפט.

3. לכל a, b ב־G, $\left(aba^{-1}b^{-1}\right)^{n(n-1)} = 1$.

פתרון

1. הטענה נכונה עבור כל m טבעי. יהי $a^m \in G^m$ ויהי $g \in G$. אזי $ga^mg^{-1} = \left(gag^{-1}\right)^m \in G^m$. לפיכך, לכל m מתקיים $G^m \lhd G$.
2. יהיו $a^n \in G^n, b^{n-1} \in G^{n-1}$ נתונים. אזי

$$
\begin{aligned}
a^nb^{n-1} &= a^nb^nb^{-1} = (ab)^n\, b^{-1} = \underbrace{abab\cdots ab}_{n\text{ times}}b^{-1} = \underbrace{abab\cdots ab}_{n-1\text{ times}}abb^{-1} \\
&= \underbrace{abab\cdots ab}_{n-1\text{ times}}a = \underbrace{abab\cdots ab}_{n-1\text{ times}}a = a\underbrace{baba\cdots ba}_{n-1\text{ times}} \\
&= b^{-1}ba\underbrace{baba\cdots ba}_{n-1\text{ times}} = b^{-1}\underbrace{baba\cdots ba}_{n\text{ times}} = b^{-1}\,(ba)^n \\
&= b^{-1}b^na^n = b^{n-1}a^n
\end{aligned}
$$

3. נתון כי $(ab)^n = a^nb^n$. נתון זה ניתן להכליל למספר כלשהו של גורמים, $(ab\cdots k)^n = a^nb^n\cdots k^n$. טענה זו ניתן להוכיח על ידי חזרה מספר פעמים על הנתון. לכן

$$
\begin{aligned}
\left(aba^{-1}b^{-1}\right)^{n(n-1)} &= \left(a^nb^na^{-n}b^{-n}\right)^{n-1} \\
&= \left(a^nb^na^{-n}b^{-n}\right)^n\left(a^nb^na^{-n}b^{-n}\right)^{-1} \\
&= a^{n^2}b^{n^2}a^{-n^2}b^{-n^2}\cdot b^na^nb^{-n}a^{-n} \\
&= a^{n^2}b^{n^2}\underbrace{a^{-n^2}b^{n-n^2}}a^nb^{-n}a^{-n} \\
&= a^{n^2}b^{n^2}\overbrace{b^{n-n^2}a^{-n^2}}a^nb^{-n}a^{-n} = a^{n^2}\underbrace{b^na^{n-n^2}}b^{-n}a^{-n} \\
&= a^{n^2}\overbrace{a^{n-n^2}b^n}b^{-n}a^{-n} = a^na^{-n} = 1
\end{aligned}
$$

במהלך הפתרון השתמשנו בטענה מספר פעמים. בעזרת קו מסולסל סימנתי את האיברים המתחלפים לפי סעיף 2. שימו לב כי כאשר איבר הוא בחזקת $n^2 - n$ הוא בעצם שייך לחיתוך $G^n \cap G^{n-1}$ ולכן מתחלף עם האיחוד $G^n \cup G^{n-1}$. שאר המעברים הם אריתמטיקה פשוטה.■

5.4.10 תנו דוגמא נגדית לטענה השגויה: אם $A, B \lhd G$ ו־$G/A \cong B$, אז $G/B \cong A$.

פתרון לפי הצעתו של פרופ' וישנה אנו ניקח את U_{15}, האיברים ההפיכים ב־$\mathbb{Z}_{15}$.[4] $15 = 3\cdot 5$ ולכן מספר האיברים הוא $8 = (3-1)\cdot(5-1)$. U_{15} היא אבלית, ולכן כל תת־חבורה שלה היא נורמלית. נביט בתת־החבורות הנוצרות על ידי 2 ועל ידי 4. מתקיים $\langle 2\rangle = \{1,2,4,8\} \cong \mathbb{Z}_4$, ומתקיים $\langle 4\rangle = \{1,4\} \cong \mathbb{Z}_2$. לפי הוכחת משפט לגרנז', מתקיים $[U_{15} : \langle 2\rangle] = 2$, ולכן $U_{15}/\langle 2\rangle \cong \mathbb{Z}_2 \cong \langle 4\rangle$ מנגד,

$$U_{15}/\langle 4\rangle = \{1\langle 4\rangle, 2\langle 4\rangle, 7\langle 4\rangle, 13\langle 4\rangle\} \cong \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2 \ncong \mathbb{Z}_4 \cong \langle 2\rangle$$

[4] $U_{15} \cong \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$, ובעזרת איזומורפיזם מתאים ניתן לנסח את הטיעון הזה בשפה של $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$.

לסיכום מצאנו שתי תת־חבורות נורמליות, המקיימות $\langle 4\rangle \cong {}^{U_{15}}/_{\langle 2\rangle}$ אבל ${}^{U_{15}}/_{\langle 4\rangle} \ncong$ $\langle 2\rangle$. לפיכך הטענה איננה נכונה. $\blacksquare$

5.4.15 תהי G חבורה, $H \lhd G$ מאינדקס n. הוכיחו כי $g^n \in H$ לכל $g \in G$.

פתרון הגדרת אינדקס היא מספר הקוסטים השמאליים. לפיכך משמעות הנתון $[G:H]=n$ היא שיש n קוסטים שמאליים. מכיוון ש־H תת־חבורה נורמלית, הקוסטים השמאליים שלה הם גם הקוסטים הימניים, והם מהווים חבורה, G/H. אם כן, הנתון הוא $\left|{}^{G}/_{H}\right| =$ n. יהי $g \in G$ נתון. נביט בקוסט המתאים לו, gH. אזי $g^nH=(gH)^n=H$. השויון האחרון נובע מכך ש־${}^{G}/_{H}$ חבורה, ולפי משפט לגרנז' הסדר של gH מחלק את הסדר של החבורה, n. מצאנו $g^nH=H$ וכך $g^n \in H$. $\blacksquare$