

שיעורי בית 3

27 בנובמבר 2015

1. תהא G חבורה. נגדיר יחס עליה כך

$$g_1 \sim g_2 \iff \exists x \in G : xg_1x^{-1} = g_2$$

ליחס זה קוראים יחס ההצמדה או יחס צמידות. (מינוח: מחלקת שקילות של יחס ההצמדה נקראת מחלקת צמידות)

(א) הוכח כי \sim יחס שקילות על G .

פתרון : (1) רפלקסיביות: לכל $g \in G$ מתקיים כי $ege^{-1} = g$ ולכן $g \sim g$.

(2) סימטריות: נניח $g_1 \sim g_2$ אזי קיים x כך ש $xg_1x^{-1} = g_2$. נכפול ב x מימין ו x^{-1} משמאל ונקבל $g_1 = x^{-1}g_2x$ נסמן $y = x^{-1}$ ונקבל $yg_2y^{-1} = g_1$, כלומר $g_2 \sim g_1$.

(3) טרנזיטיביות: נניח $g_1 \sim g_2, g_2 \sim g_3$ אזי קיימים x, y כך ש $xg_1x^{-1} = g_2$ ו $yg_2y^{-1} = g_3$. נסדר את המשוואות ל $yg_2y^{-1} = g_3, g_2 = y^{-1}g_3y$, נציב לקבל $xg_1x^{-1} = y^{-1}g_3y$ נכפול שוב ב y משמאל ו y^{-1} מימין ונקבל

$$yxg_1x^{-1}y^{-1} = g_3$$

נסמן $z = yx$ ונקבל $z g_1 z^{-1} = g_3$ כלומר $g_1 \sim g_3$.

(ב) יהא $g \in Z(G)$ (המרכז של G), מה גודל מחלקת הצמידות של g ?

פתרון : מחלקת השקילות היא

$$[g]_{\sim} = \{xgx^{-1} \mid x \in G\} = \{gxx^{-1} \mid x \in G\} = \{g \mid x \in G\} = \{g\}$$

ולכן גודל מחלקת הצמידות היא 1.

2. עבור $G = S_n$ יחס ההצמדה:

(א) מצא את מחלקת הצמידות של (1, 2).

פתרון : מתקיים כי

$$\sigma(1, 2) \sigma^{-1} = (\sigma(1), \sigma(2))$$

ולכן

$$[(1, 2)]_{\sim} = \{\sigma(1, 2)\sigma^{-1} \mid \sigma \in S_n\} = \{(\sigma(1), \sigma(2)) \mid \sigma \in S_n\} = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

(ב) כמה איברים יש במחלקת השקילות של $(1, 2)$?

פתרון: מסעיף א'

$$[(1, 2)]_{\sim} = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n\} = \{(i, j) \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$$

נבחר i כל מספר בין 1 ל n . ואז נבחר j שונה. סה"כ אפשריות שספרנו זה $n \cdot (n - 1)$. אבל ספרנו כפלויות, למשל $(2, 3) = (3, 2)$ לכן צריך לחלק ב 2. התשובה הסופית היא

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

*זה שקול לשאלה לבחור 2 איברים מתוך n ללא חשיבות לסדר, ללא חזרות. לפי נוסחת הבינום זה שווה ל

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

3. תזכורת: הגדרנו את A_n כחבורת התמורות הזוגיות, גם עליה ניתן להגדיר את יחס השקילות. תהא $\sigma \in A_n$ תמורה זוגית. בפרט $\sigma \in S_n$ ונוכל להסתכל על 2 מחלקות שקילות:

- $[\sigma]_{A_n}$ מחלקת הצמידות של σ כאיבר ב A_n
- $[\sigma]_{S_n}$ מחלקת הצמידות של σ כאיבר ב S_n

(א) מתי שתי מחלקות האלה שוות? הוכיחו כי הבאים שקולים:

i. מחלקות הצמידות לא שוות

ii. אין תמורה אי זוגית המתחלפת עם σ

פתרון: (2) \Rightarrow (1): נניח בשלילה שיש תמורה אי זוגית $\tau \in S_n$ המתחלפת עם σ .

$$\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma\tau\tau^{-1} = \sigma$$

טענה: כל $\tau'\sigma\tau'^{-1} \in [\sigma]_{S_n} \setminus [\sigma]_{A_n}$ תקיים כי τ' תמורה זוגית.

הוכחה: אחרת τ' תמורה אי זוגית ואז $\tau'\sigma\tau'^{-1} = \tau'\tau\sigma\tau^{-1}\tau'^{-1} = \sigma$

$(\tau'\tau)\sigma(\tau'\tau)^{-1}$ אבל $\tau'\tau$ תמורה זוגית (מכפלה של אי זוגיות יוצא זוגית),

$$\tau'\sigma\tau'^{-1} \notin [\sigma]_{A_n}$$

מסקנה: אם τ' תמורה אי זוגית אזי $\tau'\sigma\tau'^{-1} \in [\sigma]_{A_n}$.
 בנוסף, כיוון ש $\tau'\sigma\tau'^{-1} \in [\sigma]_{A_n}$ עבור τ' תמורה זוגית על פי הגדרה, נקבל
 כי $\tau'\sigma\tau'^{-1} \in [\sigma]_{A_n}$ עבור כל תמורה τ' . ואז נקבל כי $[\sigma]_{S_n} = [\sigma]_{A_n}$.
 סתירה לנתון.

(1) \Rightarrow (2) נניח בשלילה כי $[\sigma]_{S_n} = [\sigma]_{A_n}$. תהא $\tau \in S_n$ תמורה אי
 זוגית אזי $\tau\sigma\tau^{-1} \in [\sigma]_{S_n} = [\sigma]_{A_n}$. כיון ש $\tau\sigma\tau^{-1} \in [\sigma]_{S_n}$ אזי קיימת
 σ_1 תמורה זוגית המקיימת $\sigma_1\sigma\sigma_1^{-1} = \tau\sigma\tau^{-1}$. נפתח את השיוון ל

$$\sigma = \sigma_1^{-1}\tau\sigma\tau^{-1}\sigma_1 = (\tau^{-1}\sigma_1)^{-1}\sigma(\tau^{-1}\sigma_1)$$

כלומר σ מתחלפת עם $\tau^{-1}\sigma_1$. כיוון שתמורה זאת היא אי זוגית קיבלנו
 סתירה (התמורה אי זוגית כי σ_1 זוגית ו τ^{-1} אי זוגית [כהפוכית של אי
 זוגית])

(ב) חשב את מחלקת הצמידות של $\sigma = (1, 2, 3) = (1, 2)(2, 3) \in A_4$ ומצא איבר
 ב $[\sigma]_{S_n} \setminus [\sigma]_{A_n}$ (כלומר תמורה במחלקת הצמידות של σ כאיבר ב S_n שאינו
 נמצא במחלקת הצמידות של σ כאיבר ב A_n)
פתרון: מספר האיברים של A_4 הוא 12 (כיון ש $4! = 24 = |S_4|$ לחלק ל-2
 הנה האיברים במפורש

$$A_4 = \left\{ \begin{array}{l} id, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3), (1, 2, 3), (1, 3, 2) \\ (1, 3, 4), (1, 4, 3), (1, 2, 4), (1, 4, 2), (2, 3, 4), (2, 4, 3), \end{array} \right\}$$

ולכן

$$[\sigma]_{A_4} = \{\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(1), \tau(2), \tau(3)) \mid \tau \in A_4\} = \{(1, 2, 3), (2, 1, 4), (3, 4, 1), (4, 3, 2)\}$$

ובנוסף,

$$(1, 3, 2) \in [\sigma]_{S_n} \setminus [\sigma]_{A_n}$$