

פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 5: חוקי שימור ומשוואות המילטון

1. הלגרנג'יאן של גוף בעל מסה m עם פוטנציאל $U(r) = -GMm/r$ נתון ע"י

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)$$

(א) מצאו את ההמילטוניאן של הבעיה.

האם הוא זהה לאנרגיה של המערכת? מדוע?

(ב) רשמו את משוואות התנועה של המילטון

(ג) רשמו את הלגרנג'יאן בקואורדינטות קרטזיות והראו כי הוא סימטרי תחת

$$x \rightarrow x + \epsilon y, \quad y \rightarrow y - \epsilon x$$

(ד) מצאו שמורה של טרנספורמציה הסיבוב. מהי שמורה זו?

2. הוכיחו כי שני לגראנג'יאנים $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ הנבדלים זה מזה בנגזרת שלמה של פונקציה

של הקורדינטות והזמן $f(\vec{q}, t)$, כלומר $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + df(\vec{q}, t)/dt$, שומרים על משוואות

התנועה (רמז: הוכיחו כי $\delta S' = 0$, כאשר $S' = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}' dt$ הפעולה המתאימה ל

\mathcal{L}' וידוע כי $\delta S = 0$).

3. מטוטלת מתמטית (מסה m בקצה חוט באורך ℓ) מחוברת לתקרת מעלית הנעה

במהירות קבועה $\vec{v}_0 = v_0 \hat{y}$ ביחס למעבדה.

(א) קבלו את הלגראנג'יאן במעלית \mathcal{L} ובמעבדה \mathcal{L}' (רשמו את הפוטנציאלים

ביחס לנקודת שווי המשקל של המטוטלת) והראו כי $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + df(\theta, t)/dt$

$$f(\theta, t) = -mv_0 \ell \cos \theta - \frac{1}{2}mgv_0 t^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 t$$

(ב) רשמו את משוואות התנועה עבור \mathcal{L} ו \mathcal{L}' וודאו כי הן אכן זהות.

4. קורדינטות פאראבוליות (ξ, η, ϕ) מוגדרות ע"י הטרנספורמציות

$$x = \xi \eta \cos \phi, \quad y = \xi \eta \sin \phi, \quad z = (\eta^2 - \xi^2)/2$$

(א) רשמו את הלגראנג'יאן של חלקיק חפשי עם מסה m בקורדינטות פאראבוליות

(ב) מצאו את התנעים הצמודים (p_ξ, p_η, p_ϕ) .

(ג) מצאו את ההמילטוניאן.