מבחן לדוגמא־ 1

1. מצאו את כל הפתרונות של המשוואה הבאה: $z^2 = \sqrt{3} + 3i$. הציגו אותם בצורה קרטזית.
פתרון:
ראשית, נעביר הכל להצגה פולרית: $z^2 = \sqrt{12}\mathrm{cis}\frac{\pi}{3}$. לכן $z_1 = \sqrt[4]{12}\mathrm{cis}\frac{\pi}{6}, z_2 = \sqrt[4]{12}\mathrm{cis}\frac{7\pi}{6}$. נעבור לצורה פולרית: $z_1 = \sqrt[4]{12}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i), z_2 = -\sqrt[4]{12}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)$.

2. חשבו: $e^{2\mathrm{cis}\frac{\pi}{3}}$
פתרון:

$$e^{2\mathrm{cis}\frac{\pi}{3}} = e^{2\cos\frac{\pi}{3}+i2\sin\frac{\pi}{3}} = e^{2\cdot\frac{1}{2}+i2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = e^{1+i\sqrt{3}} = e\mathrm{cis}(\sqrt{3})$$

3. הוכיחו: לכל מספר מרוכב z מתקיים: $\sin(\pi - z) = \sin z$
פתרון:

נזכר בהגדרה של סינוס מרוכב:

$$\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-iz}}{2i}$$

ובכן, $\sin(\pi-z) = \frac{e^{(\pi-z)i} - e^{-i(\pi-z)}}{2i} = \frac{e^{\pi i}e^{-zi} - e^{-i\pi}e^{iz}}{2i} = \frac{-e^{-zi} + e^{iz}}{2i} = \sin z$.

4. האם הפונקציה הבאה גזירה? נמקו את תשובתכם. במידה והיא גזירה, מצאו את הנגזרת שלה. (הדרכה: הציגו אותה כצירוף של שתי פונקציות ממשיות בשני משתנים, והשתמשו במשוואות קושי־רימן)

$$f(z) = e^{(z^2)}$$

פתרון: $z = x+iy$. לכן $f(x+iy) = e^{(x+iy)^2} = e^{x^2-y^2+2xyi} = e^{x^2-y^2}\mathrm{cis}(2xy) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy) + ie^{x^2-y^2}\sin(zxy)$.

מכאן נקבל: $U(x,y) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy), V(x,y) = e^{x^2-y^2}\sin(2xy)$. נחשב נגזרות חלקיות:

$$U_x = 2xe^{x^2-y^2}\cos 2xy - 2ye^{x^2-y^2}\sin 2xy$$

$$U_y = -2ye^{x^2-y^2}\cos 2xy - 2xe^{x^2-y^2}\sin 2xy$$

$$V_x = 2xe^{x^2-y^2}\sin 2xy + 2ye^{x^2-y^2}\cos 2xy$$

$$V_y = -2ye^{x^2-y^2}\sin 2xy + 2xe^{x^2-y^2}\cos 2xy$$

קיבלנו שאכן $U_y = -V_x$.$U_x = V_y$ ולכן הפונקציה גזירה. בנוסף, $f' = U_x + iV_x = 2xe^{x^2-y^2}\cos 2xy - 2ye^{x^2-y^2}\sin 2xy + i[2xe^{x^2-y^2}\sin 2xy + 2ye^{x^2-y^2}\cos 2xy]$

5. מצאו פתרון כללי למד"ר הבאה:

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

פתרון:

המשוואה האופיינית היא $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$? יש לה פתרון יחיד $\lambda = 3$. לכן הפתרון הכללי הוא $y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$.

6. מצאו פתרון פרטי למד"ר $y' + 2y = x^2$ ומקיים $y(0) = 2$
פתרון:

ראשית נמצא את הפתרון הכללי.

$a(x) = 2b(x) = x^2$.

לכן $A(x) = \int a(x)dx = 2x$.

נציב בנוסחא: $y = e^{-2x}[\int e^{2x}x^2dx + c]$

חישוב עזר: נחשב את האינטגרל $\int e^{2x}x^2dx$. נעשה זאת ע"י אינטגרציה בחלקים פעמיים.

ובכן, $\int e^{2x}x^2 = x^2\frac{e^{2x}}{2} - \int 2x\frac{e^{2x}}{2} = x^2\frac{e^{2x}}{2} - [x\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}dx] = x^2\frac{e^{2x}}{2} - x\frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4}$

נציב בנוסחא ונקבל: $y = e^{-2x}[x^2\frac{e^{2x}}{2} - x\frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} + c] = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} + ce^{2x}$

כעת נציב את תנאי ההתחלה ונקבל: $2 = y(0) = \frac{1}{4} + c \Longrightarrow c = -\frac{1}{4}$

לסיכום, $y = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{2x}$