

חישוב e^A כאשר A מטריצה מסדר 2

A מטריצה אלכסונית.

אם A מטריצה $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ אז מתקיים $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$ לכל n טבעי.

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^n}{n!} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

דוגמא

$$e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

A מטריצה לכסינה.

אם A מטריצה לכסינה אז קיימת מטריצה הפיכה P כך ש $A = PDP^{-1}$ ו D מטריצה אלכסונית ואז מתקיים $A^n = PD^nP^{-1}$ לכל n טבעי.

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \left[\sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^n}{n!} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^n}{n!} \end{pmatrix} \right] P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^n}{n!} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

דוגמא

נניח ש $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$. נמצא את הערכים העצמיים $\lambda = \pm 3 \Leftrightarrow \lambda^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 9 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

הווקטור העצמי שמתאים ל $\lambda = 3$ הוא $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. הווקטור העצמי שמתאים ל $\lambda = -3$ הוא $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \text{ ואז } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \text{ סה"כ נקבל}$$

$$\text{זא} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

מטריצה בצורת זורדן

$$\text{אם} \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ זא} \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ שנקבל ש} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ מכיוון ש}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ מתחלפות ז"א} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נקבל ש:

$$e^A = e^{\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}} \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix}$$

דוגמא

$$e^A = \begin{pmatrix} e^2 & e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \text{ זא} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

מטריצה לא לכסינה שניתנת לזירדון

אם $A = PJP^{-1}$ ש J מטריצה לא לכסינה שניתנת לזירדון אז קיימת מטריצה הפיכה P כך ש $A = PJP^{-1}$ מטריצת זורדן ואז מתקיים $A^n = PJ^nP^{-1}$ לכל n טבעי.

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} PJ^nP^{-1} = P \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J^n \right] P^{-1} = Pe^J P^{-1}$$

דוגמא

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 2 \Leftrightarrow (1-\lambda) \cdot (3-\lambda) + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ \frac{1}{2} & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ נמצא את הערך העצמי}$$

$$\text{נקבל ש } \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ש מכיוון } A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ש נקבל ש } \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ש מכיוון } \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in N(A - 2I) \cap C(A - 2I)$$

$$\cdot J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \text{ ואז } P = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot e^A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot e^{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^2 & e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$