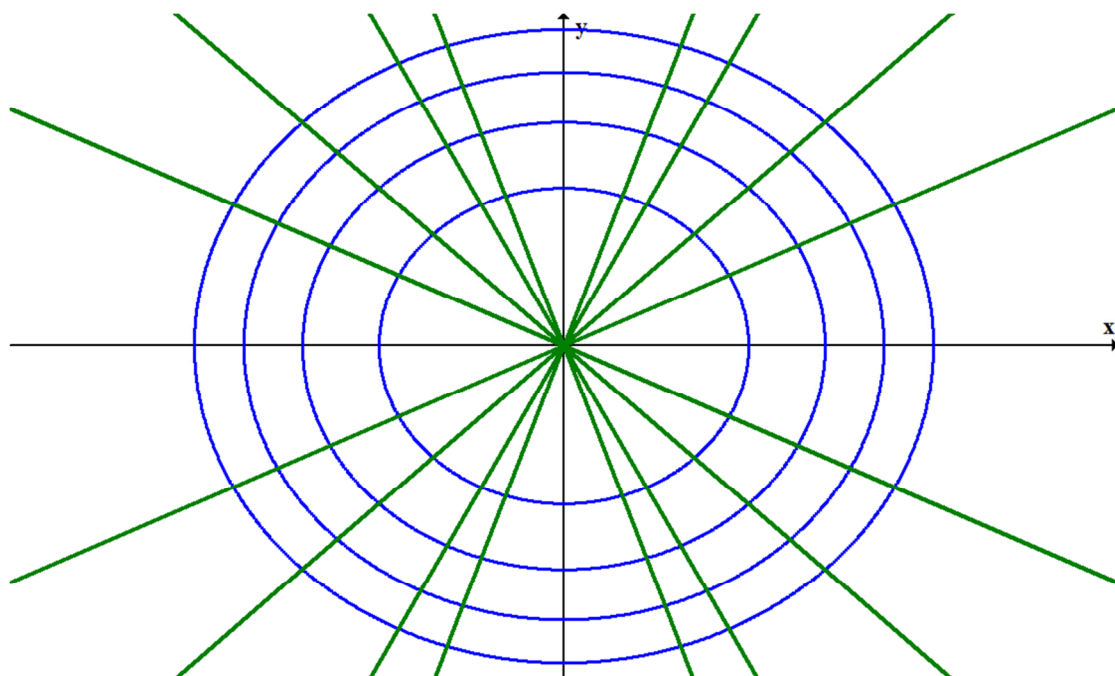


**משוואות**  
**דיפרנציאליות**  
**רגילות**



**גיא סלומון**

## סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת מתמטיקה באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק במשוואות דיפרנציאליות רגילות (מד"ר או מישדי"פ) והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

**לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)**  
**הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם**  
**רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי**  
**שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך**  
**חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.**

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון

**גול, בְּשֶׁבִיל הַתְּרַגּוּל...**

## תוכן

### פרק 1 – משוואות מסדר ראשון

- 4 ..... 1.1 משוואה הניתנת להפרדת משתנים
- 5 ..... 1.2 משוואה הומוגנית
- 7 ..... 1.3 משוואה מהצורה  $(a_1x+b_1y+c_1)dx + (a_2x+b_2y+c_2)dy = 0$
- 8 ..... 1.4 משוואה מדויקת
- 9 ..... 1.5 הפיכת משוואה לא מדויקת למשוואה מדויקת (גורם אינטגרציה)
- 10 ..... 1.6 משוואה לינארית
- 11 ..... 1.7 משוואת ברנולי
- 12 ..... 1.8 משוואת ריקטי
- 13 ..... 1.9 משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה

### פרק 2 – משוואות לינאריות מסדר שני

- 14 ..... 2.1 משוואה חסרה – הורדת סדר המשוואה (לא בהכרח לינארית)
- 15 ..... 2.2 משוואה הומוגנית עם מקדמים קבועים
- 16 ..... 2.3 משוואה לא הומוגנית עם מקדמים קבועים – השוואת מקדמים
- 17 ..... 2.4 משוואה לא הומוגנית עם מקדמים קבועים – וריאצית הפרמטרים
- 18 ..... 2.5 משוואה לא הומוגנית עם מקדמים קבועים – שיטות קצרות/אופרטוריות

### פרק 3 – משוואות לינאריות מסדר $n$

- 19 ..... 3.1 משוואה הומוגנית עם מקדמים קבועים
- 21 ..... 3.2 משוואה לא הומוגנית עם מקדמים קבועים – השוואת מקדמים
- 22 ..... 3.3 משוואה לא הומוגנית עם מקדמים קבועים – וריאצית הפרמטרים
- 23 ..... 3.4 משוואה לא הומוגנית עם מקדמים קבועים – שיטות קצרות/אופרטוריות

### פרק 4 – מערכת משוואות לינאריות

- 24 ..... 4.1 ליכסון מטריצות – מציאת ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של מטריצה
- 25 ..... 4.2 מערכת מסדר ראשון, הומוגנית, במקדמים קבועים – שיטת הליכסון
- 27 ..... 4.3 מערכת מסדר ראשון, לא הומוגנית, במקדמים קבועים – וריאצית פרמטרים
- 29 ..... 4.4 מערכת לא הומוגנית במקדמים קבועים – שיטת החילוץ

**פרק 5 – פתרון משוואות לינאריות בעזרת טורים**

- 30 ..... 5.1 פתרון על ידי טורים – נקודה רגולרית.
- 32 ..... 5.2 פתרון על ידי טורים – נקודה סינגולרית-רגולרית.

**פרק 6 – התמרת לפלס**

- 34 ..... 6.1 התמרת לפלס, התמרת לפלס של פונקציה מחזורית ושל פונקצית מדרגה.
- 36 ..... 6.2 התמרת לפלס ההפוכה, משפט הקונוולוציה.
- 38 ..... 6.3 פתרון משוואה דיפרנציאלית בעזרת התמרת לפלס.

**פרק 7 – שימושים של משוואות דיפרנציאליות**

- 40
- 45 ..... דפי נוסחאות (נגזרות, אינטגרלים, טריגו, אלגברה, טורי טילור, התמרות לפלס).

**פרק 1.1 – משוואות הנתנות להפרדת משתנים**

(1) הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית הניתנת להפרדת משתנים וכיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (2)$$

$$(1-x)y' = y^2 \quad (3)$$

$$yy'\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} = 0 \quad (4)$$

$$y(2) = 1 ; (x-1)\frac{dy}{dx} = 4y \quad (5)$$

$$y(1) = -1 ; \frac{dy}{dx} = xy + 3y - 3x - 9 \quad (6)$$

$$(x^2y - 2 + 2x^2 - y)dx - (xy^2 - 4 - 4x + y^2)dy = 0 \quad (7)$$

$$dy = 2t(y^2 + 4)dt \quad (8)$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2 \quad (9)$$

$$y(\pi) = 1 ; y' + y^2 \sin x = 0 \quad (10)$$

$$y(0) = 4 ; \frac{dy}{dx} = y \sec^2 x \quad (11)$$

**תשובות**

$$(1) y = \pm\sqrt{x^2 + k} \quad (2) y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k} \quad (3) y = \frac{1}{\ln|1-x|-c}, y = 0$$

$$(4) \sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c \quad (5) \frac{1}{4}\ln|y| = \ln|x-1| \quad (6) \ln|y-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln 4 - 3.5$$

$$(7) \frac{x^2}{2} + x = \frac{y^2}{2} + c, y = -2 \quad (8) y = 2 \tan(2t^2 + k) \quad (9) x = 1 + \tan(t + c)$$

$$(10) y = -\frac{1}{\cos x} \quad (11) \ln|y| = \tan x + \ln 5 \quad (12) \frac{1}{-2y^2} = \sqrt{1+x^2} - 1.5$$

**פרק 1.2 – משוואות הומוגניות**

(1) הגדר והדגם את המושג פונקציה הומוגנית של שני משתנים.

(2) הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית הומוגנית וכיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$(y^3 + x^3)dx + xy^2 dy = 0 \quad (3)$$

$$y' = \frac{4y - 3x}{2x - y} \quad (4)$$

$$y^2 + x^2 y' = xyy' \quad (5)$$

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \quad (6)$$

$$\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right)dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0 \quad (7)$$

$$y' = \frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2 e^{(x/y)^2} + 2x^2 e^{(x/y)^2}} \quad (8)$$

$$y(1) = 0 ; \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0 \quad (9)$$

$$(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0 \quad (10)$$

$$(11) \text{ נתונה המשוואה } (y^2 + x^2)dx + xy^n dy = 0$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע  $n$  על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית.

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של  $n$  שמצאת בסעיף א.

**תשובות**

$$(3) -\ln|x| = \frac{1}{6} \ln|2(y/x)^3 + 1| + c, y = -\frac{x}{2^{1/3}}$$

$$(4) \ln|x| = \frac{1}{4} \ln|(y/x) - 1| - \frac{5}{4} \ln|(y/x) + 3| + c, y = x, y = -3x$$

$$(5) -\ln|x| = \ln|(y/x)| - (y/x) + c, y = 0$$

$$(6) -\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|2(y/x)^2 + 4| + c, y = 0, y = -2x$$

$$(7) \ln|x| = -\sin(y/x) + c \quad (8) \ln\left(1 + e^{(x/y)^2}\right) = \ln|y| + c, y = 0 \quad (9) \ln x = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + c$$

$$(10) \ln|t| = -\frac{1}{2} \ln|(x/t) - (x/t)^2| + c, x(t) = 0, x(t) = t$$

$$(11) n = 1, \ln|x| = -\frac{1}{4} \ln\left(1 + 2(x/y)^2\right) + c$$

**פרק 1.3 - משוואות מהצורה**  $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$

(1) הסבר כיצד פותרים משוואות מן הצורה  $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$   
פתור את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+x+y}{2+x+y} \quad (2)$$

$$(x+2y+3)dx + (2x+4y-1)dy = 0 \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x+5}{2x-y-4} \quad (4)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3+x+2y}{1+x+y} \quad (5)$$

$$(2x+y-3)dx + (x+y-1)dy = 0 \quad (6)$$

**תשובות**

$$(2) \quad x = \frac{1}{2}(x+y+1) + \frac{1}{4}\ln(2(x+y+1)+1) + \frac{1}{4} + c, \quad y = -x - 1.5$$

$$(3) \quad 0 = 14y - (x+2y+3)^2 + k$$

$$(4) \quad \ln|x-1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1} - 1\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1} + 1\right| + c, \quad y = x - 3, \quad y = -x - 1$$

$$(5) \quad \ln|x-1| = \frac{1}{4}\left[-(2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2} - 2\frac{y+2}{x-1}\right| + (-2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2} + 2\frac{y+2}{x-1}\right|\right] + c,$$

$$y = \sqrt{0.5}x - 2 - \sqrt{0.5}, \quad y = -\sqrt{0.5}x - 2 + \sqrt{0.5}$$

$$(6) \quad \ln|x-2| = \frac{1}{2}\ln\left(2 + 2\frac{y+1}{x-2} + \left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2\right) + c$$



**פרק 1.4 – משוואות מדויקות**

(1) הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית מדויקת וכיצד פותרים אותה  
פתור את המשוואות הבאות :

$$(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0 \quad (2)$$

$$(y^2 e^{xy^2} + 4x^3)dx + (2xye^{xy^2} - 3y^2)dy = 0 \quad (3)$$

$$(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2 e^y - 1)dy = 0 \quad (4)$$

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0 \quad (5)$$

$$\left( y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2 \right) dx + \left( \frac{1}{x+y} + 2y(x+1) \right) dy = 0 \quad (6)$$

$$(2x^2 t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2 t + 2xt^2)dx = 0 \quad (7)$$

(8) נתונה המשוואה  $(3x^2 + ye^{xy})dx + (2y^3 + kxe^{xy})dy = 0$  באשר  $k$  קבוע.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע  $k$  על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת.

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של  $k$  שמצאת בסעיף א.

**תשובות**

$$(2) 0.5x^4 + 3yx + 0.5y^2 - y = c \quad (3) e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c \quad (4) y \sin x + x^2 e^y - y = c$$

$$(5) x - \frac{y^2 \cos 2x}{2} - \frac{y^2}{2} = c \quad (6) \ln|x+y| + (x+1)y^2 + 2x - \ln|x| = c$$

$$(7) x^2 t^2 - 2x^3 t + x^4 = c \quad (8) k = 1, \quad x^3 + e^{xy} + \frac{y^4}{2} = c$$

**פרק 1.5 – הפיכת משוואה לא מדוייקת למשוואה מדוייקת (גורם אינטגרציה)**

(1) הסבר מהו גורם אינטגרציה והראה כיצד ניתן בעזרתו להפוך משוואה לא מדוייקת למשוואה מדוייקת.

(2) הראה שהמשוואה  $x^2 y^3 + x(1 + y^2) y' = 0$  אינה מדוייקת ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה  $\frac{1}{xy^3}$ .

(3) הראה שהמשוואה  $\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x} \sin x\right) dx + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y}\right) dy = 0$

אינה מדוייקת ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה  $ye^x$ .

(4) הראה שהמשוואה  $(x+2) \sin y dx + x \cos y dy = 0$  אינה מדוייקת ופתור אותה בעזרת גורם אינטגרציה  $xe^x$ .

(5) פתור את המשוואה  $(x^2 + y^2 + x) dx + (xy) dy = 0$ .

(6) פתור את המשוואה  $(x - x^2 - y^2) dx + y dy = 0$ .

(7) פתור את המשוואה  $(2xy^3 + y^4) dx + (xy^3 - 2) dy = 0$ .

(8) פתור את המשוואה  $(y^2 - y) dx + x dy = 0$ .

(9) פתור את המשוואה  $(y - xy^2) dx + (x + x^2 y^2) dy = 0$ .

(10) פתור את המשוואה  $y' = \frac{3yx^2}{x^3 + 2y^4}$ .

**תשובות**

(2)  $0.5x^2 + \frac{y^{-2}}{-2} + \ln|y| = c$  (3)  $e^x \sin y + 2y \cos x = c$  (4)  $\sin y \cdot e^x \cdot x^2 = c$

(5)  $0.25x^4 + 0.5x^2 y^2 + \frac{x^3}{3} = c$  (6)  $\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - x = c$  (7)  $x^2 + xy + \frac{1}{y^2} = c$

(8)  $x - \frac{x}{y} = c$  (9)  $-\ln x - \frac{1}{xy} + y = c$  (10)  $-\frac{x^3}{y} + \frac{2y^3}{3} = \frac{1}{3}$

**פרק 1.6 – משוואה לינארית**

(1) הגדר משוואה לינארית מסדר ראשון והסבר כיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (2)$$

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \quad (3)$$

$$(x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad (4)$$

$$x^3y' + (2-3x^2)y = x^3 \quad (5)$$

$$y(0) = 1 ; \frac{dy}{dt} + y = 2 + 2t \quad (6)$$

$$\frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x} \quad (7)$$

$$y' - 2y \cot x = 1 \quad (8)$$

$$z(\pi) = 0 ; x^2z' + 2xz = \cos x \quad (9)$$

**תשובות**

$$(2) y = 2 + C \cdot e^{-x^2} \quad (3) y = x \left[ \frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right] \quad (4) y = (x-2) [x^2 - 4x + C]$$

$$(5) y = \frac{1}{2}x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad (6) y = 2t + e^{-t} \quad (7) y = \frac{1}{\sin x} [-5e^{\cos x} + C]$$

$$(8) y = \sin^2 x [-\cot x + C] \quad (9) z = \frac{\sin x}{x^2}$$

פרק 1.7 – משוואות ברנולי

(1) הגדר את משוואת ברנולי והסבר כיצד ניתן לפתור אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0 \quad (2)$$

$$(x^2 + 1)y' - 2xy - y^2 = 0 \quad (3)$$

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 y^{1/2} \quad (4)$$

$$y(1) = 2.5 ; y' - \left( \frac{1}{x} + 5x^4 \right) y = -x^3 y^2 \quad (5)$$

$$z' - \cot x \cdot z = \frac{1}{\sin x} z^3 \quad (6)$$

תשובות

$$(2) y = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x} + c \cdot x^4}} \quad (3) y = \frac{x^2 + 1}{-x + C} \quad (4) y = x^2 \left( \frac{x}{2} + C \right)^2 \quad (5) y = \frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5} + e}$$

$$(6) z = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x + C}}$$

**פרק 1.8 – משוואת ריקטי**

(1) הגדר את משוואת ריקטי והסבר כיצד ניתן לפתור אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

$$y' = e^{2x} + \left(1 + \frac{5}{2}e^x\right)y + y^2 \quad (2)$$

$$y' = -(1 + x + x^2) - (2x + 1)y - y^2 \quad (3)$$

$$y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2 \quad (4)$$

$$y' = 1 + x + 2x^2 \cos x - (1 + 4x \cos x)y + 2y^2 \cos x \quad (5)$$

**תשובות**

$$(2) \quad y(x) = -x + \frac{1}{1 + Ce^x} \quad (3) \quad y(x) = -0.5e^x + \frac{e^x}{-\frac{2}{3} + Ce^{-1.5x}}$$

$$(4) \quad y(x) = x + \frac{1}{-x + C} \quad (5) \quad y(x) = x + \frac{1}{\cos x - \sin x + Ce^x}$$

**פרק 1.9 – משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה****הערה**

$$\cdot p = y' = \frac{dy}{dx} \text{ בתת-פרק זה מסמנים}$$

(1) הגדר משוואה מסדר ראשון וממעלה גבוהה והסבר כיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$4x^2 p^2 - 4x^2 p - 2xy - y^2 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 p^2 + xyp - 6y^2 = 0 \quad (3)$$

$$xyp^2 + (x^2 + xy + y^2)p + x^2 + xy = 0 \quad (4)$$

$$y = 2px + p^4 x^2 \quad (5)$$

$$xp^2 - 2yp + 4x = 0 \quad (6)$$

$$6p^2 y^2 + 3px - y = 0 \quad (7)$$

**תשובות**

$$(2) (y - 2x - \sqrt{x} \cdot c_1) \cdot \left( \ln|y| + \frac{1}{2} \ln|x| - c_2 \right) = 0$$

$$(3) (\ln|y| - 2\ln|x| - c_1) \cdot (\ln|y| + 3\ln|x| - c_2) = 0$$

$$(4) (y + 0.5x - \frac{c_1}{x}) \cdot (\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - c_2) = 0, \quad x > 0 \quad (5) \quad y = \pm 2\sqrt{cx} + c^2$$

$$(6) \quad y = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{2}{c} \quad (7) \quad 6\left(\frac{c}{y^2}\right)^2 y^2 + 3\left(\frac{c}{y^2}\right)x - y = 0$$

**פרק 2.1 – משוואה חסרה מסדר שני (הורדת סדר המשוואה)**

(1) הגדר משוואה חסרה מדר שני והסבר כיצד ניתן לפתור אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$x^2 y'' + xy' = \frac{1}{x} \quad (2)$$

$$y'' \tan x - 1 = y' \quad (3)$$

$$2xy' y'' - (y')^2 + 1 = 0 \quad (4)$$

$$y'' x \ln x = y' \quad (5)$$

$$xy'' = x^2 e^x + y' \quad (6)$$

$$yy'' + (y')^2 = 0 \quad (7)$$

$$2y'' y - (y')^2 = 1 \quad (8)$$

$$x^3 y'' + x^2 y' = 1 \quad (9)$$

**תשובות**

$$(2) \quad y = \frac{1}{x} + C_1 \cdot \ln x + C_2 \quad (3) \quad y = -x + C_1 \cdot \cos x + C_2$$

$$(4) \quad y = \pm \frac{2}{3C_1} (C_1 x + 1)^{3/2} + C_2 ; \quad y = \pm x + C_3$$

$$(5) \quad y = C_1(x \ln x - x) + C_2 ; \quad y = C_3 \quad (6) \quad y = e^x(x-1) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2$$

$$(7) \quad \frac{y^2}{2} = cx + k ; \quad y = c \quad (8) \quad y = \frac{1}{c} \left[ \frac{c^2(x+k)^4}{4} + 1 \right] \quad (9) \quad \cot y = -(cx+k) ; \quad y = c$$

**פרק 2.2 – משוואות מסדר שני, לינאריות, הומוגניות עם מקדמים קבועים**

(1) הגדר משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים והסבר כיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$y'' - 100y = 0 \quad (2)$$

$$y'' - 4y' = 0 \quad (3)$$

$$y'' - 8y' + 7y = 0 \quad (4)$$

$$z(0) = 1, z'(0) = 1 ; 4z'' + z' - 5z = 0 \quad (5)$$

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad (6)$$

$$4 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial x}{\partial t} + x(t) = 0 \quad (7)$$

$$y'' + 4y = 0 \quad (8)$$

$$y'' + 10y = 0 \quad (9)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1 ; y'' - 2y' + 10y = 0 \quad (10)$$

$$5y'' + 8y' + 4y = 0 \quad (11)$$

**תשובות**

$$(2) y = c_1 e^{10x} + c_2 e^{-10x} \quad (3) y = c_1 + c_2 e^{4x} \quad (4) y = c_1 e^x + c_2 e^{7x} \quad (5) z = e^x$$

$$(6) y = c_1 e^x + c_2 x e^x \quad (7) x(t) = c_1 e^{-t/2} + c_2 t e^{-t/2} \quad (8) y = e^{-5x} [c_1 \cos 10x + c_2 \sin 10x]$$

$$(9) c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \quad (10) y = e^2 \sin 3x \quad (11) y = e^{-4x/5} \left[ c_1 \cos \left( \frac{2}{5} x \right) + c_2 \sin \left( \frac{2}{5} x \right) \right]$$



**פרק 2.3 – משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים – השוואת מקדמים**

(1) הסבר והדגם כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים בשיטת השוואת המקדמים.

פתור את המשוואות הבאות:

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 16x^2 \quad (2)$$

$$y(0) = 2, y'(0) = 7; y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (3)$$

$$y'' - y' - 2y = 4 \sin 2x \quad (4)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (5)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (6)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (7)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (8)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (9)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (10)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (11)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (12)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (13)$$

**תשובות**

$$(2) y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (3) y = e^x + 4xe^x + e^{2x}$$

$$(4) y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (5) y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x}$$

$$(6) y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (7) c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x$$

$$(8) y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3x e^x + 2e^{3x} \quad (9) z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x$$

$$(10) y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - x e^x \quad (11) y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3$$

$$(12) x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + t e^{-2t} \quad (13) y = e^{-x} \sin 2x$$

**פרק 2.4 – משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים – וריאציית פרמטרים**

(1) הסבר כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים בשיטת וריאציית הפרמטרים.

פתור את המשוואות הבאות:

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x} \quad (2)$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x \quad (3)$$

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1} \quad (4)$$

$$y(1) = 0, y'(1) = 0; \quad y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \quad (5)$$

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad (6)$$

$$y'' + 4y = \sec 2x \quad (7)$$

**תשובות**

$$(2) \quad y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \cdot x + \sin x \cdot \ln |\sin x|$$

$$(3) \quad y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - e^{-2x} \frac{x^2}{2} \left[ \ln x - \frac{1}{2} \right] + x^2 e^{-x} [\ln x - 1]$$

$$(4) \quad y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - e^{-x} \left[ \frac{6(\sqrt{x+1})^5}{5} - \frac{6(\sqrt{x+1})^3}{3} \right] + x e^{-x} [2(x+1)^{3/2}]$$

$$(5) \quad y = e^x - x e^x + x e^x \ln x \quad (x > 0)$$

$$(6) \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x \ln(1 + e^{-x}) + e^{2x} [\ln(1 + e^{-x}) - (1 + e^{-x})]$$

$$(7) \quad y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x| + \sin 2x \cdot x$$

**פרק 2.5 – משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים – שיטה אופרטוריות**

(1) הסבר כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים בשיטה האופרטורית.

פתור את המשוואות הבאות:

$$(D^2 - D - 2)y = 4e^{-2x} + 10e^x + 11 \quad (2)$$

$$(D^2 - 2D + 1)y = 10e^{4x} + e^x - 1 \quad (3)$$

$$(D^2 + D - 2)y = 4e^x + e^{10x} + 14 \quad (4)$$

$$(D^2 + 4)y = \sin 5x \quad (5)$$

$$(D^2 - 4)y = \sin x \cos x \cos 2x \quad (6)$$

$$(D^2 + D - 2)y = \cos x - 3\sin x \quad (7)$$

$$(D^2 + 2D - 3)y = 2 \cos x \cos 2x \quad (8)$$

$$\boxed{(aD^2 + bD + c)y = Q(x) \Leftrightarrow ay'' + by' + cy = Q(x)} \quad \text{הערת סימון}$$

**תשובות**

$$(2) \quad y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + e^{-2x} - 5e^x - 5.5 \quad (3) \quad y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{10}{9} e^{4x} + x^2 e^x - 1$$

$$(4) \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - 4x e^x + \frac{1}{72} e^{10x} + 7 \quad (5) \quad y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{21} \sin 5x$$

$$(6) \quad y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{80} \sin 4x \quad (7) \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \sin x$$

$$(8) \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{30} \sin 3x - \frac{1}{15} \cos 3x$$

**פרק 3.1 – משוואות לינאריות, הומוגניות עם מקדמים קבועים**

- (1) הגדר משוואה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים והסבר כיצד פותרים אותה.  
 (2) הקושי העיקרי בפתרון משוואה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים הוא בפתרון המשוואה האופיינית. צטט מספר משפטים מתחום האלגברה שבעזרתם נוכל לפתור את המשוואה האופיינית ביתר קלות.  
 פתור את המשוואות הבאות:

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0 \quad (3)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = 0 \quad (4)$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 \quad (5)$$

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0 \quad (6)$$

$$y^{(4)} - y = 0 \quad (7)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 2\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 20y = 0 \quad (8)$$

$$y^{(4)} + y = 0 \quad (9)$$

$$y^{(6)} - y'' = 0 \quad (10)$$

$$(D^5 + 3D^4 + 2D^3 - 2D^2 - 3D - 1)y = 0 \quad (11)$$

$$y^{(8)} + 8y^{(4)} + 16y = 0 \quad (12)$$

$$z''' - 6z'' + 12z' - 8z = 0 \quad (13)$$

$$y^{(4)} - 4y = 0 \quad (14)$$

$$x^{(6)} - 3x^{(4)} + 3x'' - x = 0 \quad (15)$$

$$y(0) = 3, y'(0) = 4, y''(0) = -1; y''' - y'' + y' - y = 0 \quad (16)$$

$$y(0) = 2, y'(0) = 5, y''(0) = -19, y'''(0) = -47; y'''' - 3y'''' + 6y'' - 12y' + 8y = 0 \quad (17)$$

- (18) נתונה מד"ר הומוגנית עם מקדמים קבועים מסדר 6 אשר אחד הפתרונות שלה הוא

$$x^2 e^x \cos 2x \quad . \text{א. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה} \quad . \text{ב. מצא את המד"ר.}$$

**תשובות:**

- (3)  $y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x}$                       (4)  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x}$   
 (5)  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$                       (6)  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}$   
 (7)  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{0x} [c_3 \cos x + c_4 \sin x]$       (8)  $y = c_1 e^{-4x} + e^x [c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x]$   
 (9)  $y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left( c_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left( c_3 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_4 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right)$   
 (10)  $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 e^{-x} + \cos x + \sin x$   
 (11)  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} + c_4 x^2 e^{-x} + c_5 x^3 e^{-x}$   
 (12)  $y = e^x [c_1 \cos x + c_2 \sin x] + x e^x [c_3 \cos x + c_4 \sin x] + e^{-x} [c_5 \cos x + c_6 \sin x] + x e^{-x} [c_7 \cos x + c_8 \sin x]$   
 (13)  $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x}$   
 (14)  $y = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} + c_3 \cos \sqrt{2}x + c_4 \sin \sqrt{2}x$   
 (15)  $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 e^{-x} + c_5 x e^{-x} + c_6 x^2 e^{-x}$   
 (16)  $y = e^x + 2 \cos x + 3 \sin x$       (17)  $y = e^x - 2e^{2x} + 3 \cos 2x + 4 \sin 2x$   
 (18) (a)  $y = e^x [c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x] + x e^x [c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x] + x^2 e^x [c_5 \cos 2x + c_6 \sin 2x]$   
 (b)  $y'''' - 6y'''' + 27y'''' - 68y'''' + 135y'''' - 150y'''' + 125y = 0$

**פרק 3.2 – משוואה לא הומוגנית, לינארית, עם מקדמים קבועים – השוואת מקדמים**

(1) הסבר כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית עם מקדמים קבועים בשיטת השוואת המקדמים.

פתור את המשוואות הבאות:

$$y''' - 2y'' - 3y' = 2 \sin x - 4 \cos x \quad (2)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = -28e^{2x} \quad (3)$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 14 \quad (4)$$

$$y''' - 3y' + 2y = e^x \quad (5)$$

$$y''' - y'' + y' - y = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (6)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = -1, y''(0) = 2 ; y''' - y' = 4e^{-x} + 3e^{2x} \quad (7)$$

$$y^{(4)} + y'' = 3x^2 + 4 \sin x - 2 \cos x \quad (8)$$

**תשובות:**

$$(2) y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} + \sin x \quad (3) y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} + e^{2x}$$

$$(4) y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + x^3 + 4 \quad (5) y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{6} x^2 e^x$$

$$(6) y = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \frac{1}{4} x (\cos x - \sin x) \quad (7) y = -4.5 + 4e^{-x} + 2x e^{-x} + \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$(8) y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \frac{1}{4} x^4 - 3x^2 + x \sin x + 2x \cos x$$

**פרק 3.3 – משוואה לא הומוגנית, לינארית, עם מקדמים קבועים – וריאציית פרמטרים**

(1) הסבר כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית עם מקדמים קבועים בשיטת וריאציית הפרמטרים.

פתור את המשוואות הבאות:

$$y''' + y' = \frac{1}{\cos x} \quad (2)$$

$$y''' - 3y'' + 2y' = \frac{e^x}{1 + e^{-x}} \quad (3)$$

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = \frac{e^x}{x} \quad (4)$$

**תשובות:**

$$(2) \quad y = c_1 + c_2 \cdot \cos x + c_3 \cdot \sin x + \ln \left| \tan x + \frac{1}{\cos x} \right| - x \cos x + \sin x \ln |\cos x|$$

$$(3) \quad y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + \frac{1}{2} (e^x + 1 - \ln(e^x + 1)) + e^x (-\ln(e^x + 1)) + e^{2x} \left( -\frac{1}{2} \ln(1 + e^{-x}) \right)$$

$$(4) \quad y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x - \frac{3}{4} x^2 e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x \ln|x|$$

**פרק 3.4 – משוואה לא הומוגנית, לינארית, עם מקדמים קבועים – שיטות קצרות/אופרטוריות**

(1) הסבר כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית עם מקדמים קבועים בשיטה האופרטורית.

פתור את המשוואות הבאות:

$$(D^3 - 2D^2 - 3D)y = 4e^x - 10e^{-2x} \quad (2)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = 10e^{4x} + 2e^x - 1 \quad (3)$$

$$(D^4 - 6D^3 + 13D^2 - 12D + 4)y = 10e^x + 4e^{2x} \quad (4)$$

$$(D^5 - 8D^4 + 22D^3 - 28D^2 + 17D - 4)y = 24e^x + 81e^{4x} \quad (5)$$

$$(D^6 + D^4 + D^2)y = 104 \sin(2x + 1) + \cos(x + 10) \quad (6)$$

$$(D^5 - 8D^4 + 22D^3 - 28D^2 + 17D - 4)y = -5 \sin 2x \quad (7)$$

$$(D^4 - 3D^3 + 6D^2 - 12D + 8)y = 30 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 48 \cos^2 x - 16 \quad (8)$$

**תשובות:**

$$(2) y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} - e^x + e^{-2x}$$

$$(3) y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} + \frac{5}{81} e^{4x} - \frac{1}{18} x e^x - \frac{1}{30}$$

$$(4) y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{2x} + c_4 x e^{2x} + 5x^2 e^x + 2x^2 e^{2x}$$

$$(5) y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 x^3 e^x + c_5 e^{4x} - \frac{1}{3} x^4 e^x + x e^{4x}$$

$$(6) y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x} + c_5 e^{3x} + c_6 e^{-3x} - 2 \sin(2x + 1) - \cos(x + 10)$$

$$(7) y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 x^3 e^x + c_5 e^{4x} + \frac{1}{500} [4 \sin 2x - 22 \cos 2x]$$

$$(8) y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x + \frac{5 \sin x + 25 \cos x}{26} + \frac{-3 \cos 2x - 18 \sin 2x}{37} + 1$$



**פרק 4.1 – ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון מטריצות**

עבור כל אחת מהמטריצות הבאות מצא ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

**תשובות:**

- (1)  $x=0, x=1, x=2, v_{x=0} = (-1,0,1), v_{x=1} = (0,1,0), v_{x=2} = (1,0,1)$   
 (2)  $x=6, x=2, x=-4, v_{x=6} = (0,0,1), v_{x=2} = (1,1,1), v_{x=-4} = (-1,1,0)$   
 (3)  $x_1=2, x_2=3, x_3=3, v_{x=2} = (1,1,1), v_{x=3}^{(1)} = (1,0,1), x_{x=3}^{(2)} = (1,1,0)$   
 (4)  $x=1, x=3, x=-2, v_{x=1} = (-1,4,1), v_{x=3} = (1,2,1), v_{x=-2} = (-1,1,1)$   
 (5)  $x=1, x=4, x=-1, v_{x=1} = (1,-2,1), v_{x=4} = (1,1,1), v_{x=-1} = (-1,0,1)$   
 (6)  $x=-1, x=3, v_{x=-1} = (-1,2), v_{x=3} = (1,2)$   
 (7)  $x_{1,2} = 1 \pm 2i, v_{x=1+2i} = (1+i,2), v_{x=1-2i} = (1-i,2)$   
 (8)  $x=1, x=1+\sqrt{3}i, x=1-\sqrt{3}i, v_{x=1} = (1,1,1)$   
 $v_{x=1+\sqrt{3}i} = (1-\sqrt{3}i, 1+\sqrt{3}i, -2), v_{x=1-\sqrt{3}i} = (1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -2)$

**פרק 4.2 – מערכת מסדר ראשון, הומוגנית, במקדמים קבועים – שיטת הליכסון**

(1) הסבר כיצד פותרים מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, במקדמים קבועים בשיטת הליכסון.

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad \text{פתור (2)}$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{פתור (3)}$$

$$z(t) = y(t) \text{ הוכח כי } \underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ כד ש-} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \text{נתון (4)}$$

$$\begin{cases} x' = x - y + 4z \\ y' = 3x + 2y - z \\ z' = 2x + y - z \end{cases} \quad \text{פתור (5)}$$

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad \text{פתור (6)}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} + \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} : \text{חשב } \underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ כד ש-} \underline{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} \quad \text{נתון (7)}$$

$$\begin{cases} y_1' + 5y_1 - 2y_2' = 0 \\ 3y_2' - 4y_1' - 5y_2 = 0 \end{cases} \quad \text{פתור (8)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{פתור (9) } \bar{x}'(t) = A \cdot \bar{x}(t) \text{ כאשר}$$

• הערה: בשאלות 8,9 יש להגיע מהפתרון המרוכב לפתרון ממשי.

תשובות:

$$(2) \underline{x}(t) = c_1 e^{0t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3) \underline{x}(t) = e^{6t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3e^{-4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(5) \underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6) \underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(7) 0 \quad (8) \underline{x}(t) = c_1 e^t \left[ \cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \sin 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + c_2 e^t \left[ \cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$(9) \underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \left[ \cos \sqrt{3}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \sin \sqrt{3}t \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right] + c_2 e^t \left[ \sin \sqrt{3}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \cos \sqrt{3}t \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

**פרק 4.3 – מערכת מסדר ראשון, לא הומוגנית, במקדמים קבועים – וריאציית הפרמטרים**

(1) הסבר כיצד פותרים מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, לא הומוגניות, במקדמים קבועים בשיטת וריאציית הפרמטרים.

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 + 2e^{-t} \\ x_2' &= 4x_1 + x_2 + 4e^{-t} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 + e^{at} \\ x_2' &= 4x_1 + x_2 - 2e^{at} \end{aligned} \quad (3)$$

(a קבוע)

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 18t \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} x' &= x + y + 2z + e^t \\ y' &= x + 2y + z \\ z' &= 2x + y + z + e^t \end{aligned} \quad (5)$$

(6) המר את המשוואה  $y''' + y'' - 2y' = t^2$  במערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון.

**תשובות:**

$$(2) \underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$(3) \underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} \quad (a = -1),$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+a} \begin{pmatrix} e^{at} \\ -2e^{at} \end{pmatrix} \quad (a \neq 1)$$

$$(4) \underline{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (3t+2) \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - (3t+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-3t+1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(5) \underline{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{3} t e^t\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{2}{9} e^t\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(6) \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

**פרק 4.4 – מערכת לא הומוגנית במקדמים קבועים – שיטת החילוץ**

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} y'' + 2z' = e^{3x} \\ y' - z'' + 3z = x^2 \end{cases} \quad (1)$$

$$z(0) = y(0) = y'(0) = 0 \quad \text{בהינתן} \quad \begin{cases} y'' + z' = e^{-2x} \\ y + z = \sin x \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y + e^t \\ y' = 6x - 3y + e^{-t} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + \sin 2t \\ x_2' = x_1 + x_2 + \cos 2t \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} z'' - 3z' + 2z + y' - y = 0 \\ z' - 2z + y' + y = 0 \end{cases} \quad (5)$$

**תשובות:**

$$(1) \quad z = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + \frac{1}{24} e^{3x} + x^2, \quad y = \frac{1}{12} e^{3x} - \frac{2}{3} x^3 - 2c_2 e^x + 2c_3 e^{-x} + kx + l$$

$$(2) \quad z = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} e^x - \frac{1}{6} e^{-2x} - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x, \quad y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} e^x + \frac{1}{6} e^{-2x} + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x$$

$$(3) \quad x = c_1 + c_2 e^t + 4te^t - e^{-t}, \quad y = 2c_1 + \frac{3}{2} c_2 e^t + 6te^t - \frac{3}{2} e^t - \frac{5}{2} e^{-t}$$

$$(4) \quad x_1 = c_1 + c_2 e^{2t} - \frac{1}{2} \cos 2t - \frac{1}{4} \sin 2t, \quad x_2 = -c_1 + c_2 e^{2t} + \frac{1}{4} \sin 2t$$

$$(5) \quad z = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x}, \quad y = 2c_1 + \frac{1}{2} c_2 e^x$$

**פרק 5.1 – פתרון מד"ר בעזרת טורים סביב נקודה רגולרית**

- (1) נתונה מד"ר מהתבנית  $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$  שעבורה הנקודה  $x = 0$  היא נקודה רגולרית. הסבר כיצד פותרים את המד"ר על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב הנקודה  $x = 0$ . בתשובתך התייחס גם למקרה בו הנקודה היא רגולרית כלשהי,  $x = x_0$ . (הנח כי  $p, q$  פולינומים או מנה של פולינומים).

פתור את המשוואות הבאות (2-8) על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב  $x = 0$ . במיוחד, רשום נוסחה רקורסיבית (נוסחת נסיגה) עבור האיבר הכללי וציין את ארבעת האיברים הראשונים בפיתוח של הטור. (הערת ניסוח: טור חזקות סביב  $x = 0$  שקול לטור טיילור סביב  $x = 0$  ושקול לטור מקלורן).

$$y(0) = 3, y'(0) = 12 ; y'' - 2x^2y' + 4xy = x^2 + 2x + 2 \quad (2)$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 2 ; y'' - xy = 0 \quad (3)$$

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad (4)$$

$$(x^2 + 4)y'' + xy = x + 2 \quad (5)$$

$$y'' + (x-1)y' + (2x-3)y = 0 \quad (6)$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 2 ; y'' + ty = e^{t+1} \quad (7)$$

$$y'' + (t-1)y' + (2t-3)y = 0 \quad (8) \text{ (השתמש בפתרון בסימן } \sum \text{)}$$

(9) פתור את המשוואה  $y'' + (x-1)y = e^x$  על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב  $x = 1$ .

(10) פתור את המשוואה  $y'' + xy' + (2x-1)y = 0$  על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב  $x = -1$ .

רמז: תנאי ההתחלה מרמז על כך שכדאי לפתח את הפתרון לטור חזקות סביב  $x = -1$ .

**תשובות:**

$$(2) a_n = \frac{2n-10}{(n-1)n} a_{n-3} \quad (n \geq 5) \quad , \quad y = 3 + 12x + x^2 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{23}{12}x^4 + \dots + a_n x^n \dots$$

$$(3) a_n = \frac{1}{(n-1)n} a_{n-3} \quad (n \geq 3) \quad , \quad y = 1 + 2x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \dots + a_n x^n + \dots$$

$$(4) a_n = \frac{n-3}{n-1} a_{n-2} \quad (n \geq 2) \quad , \quad y = a_0 + a_1 x + -a_0 x^2 + 0x^3 - \frac{1}{3}a_0 x^4 + \dots + a_n x^n + \dots$$

$$(5) a_n = \frac{-1}{4(n-1)n} a_{n-3} - \frac{(n-2)(n-3)}{4(n-1)n} a_{n-2} \quad (n \geq 4)$$

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{1}{4}x^2 + \left(\frac{1-a_0}{24}\right)x^3 + \left(\frac{-1}{48}a_1 - \frac{1}{96}\right)x^4 + \dots + a_n x^n$$

$$(6) a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} - \frac{n-5}{n(n-1)} a_{n-2} - \frac{2}{n(n-1)} a_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

$$y = a_0 + a_1 x + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2}a_0\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{6}a_0\right)x^3 + \frac{1}{6}a_0 x^4 + \dots + a_n x^n + \dots$$

$$(7) a_n = \frac{e}{n(n-1)(n-2)!} - \frac{a_{n-3}}{n(n-1)} \quad (n \geq 3)$$

$$y(t) = 1 + 2t + \frac{e}{2}t^2 + \frac{e-1}{6}t^3 + \frac{e-4}{24}t^4 + \dots + a_n t^n + \dots$$

$$(8) a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} - \frac{n-5}{n(n-1)} a_{n-2} - \frac{2}{n(n-1)} a_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

$$y = a_0 + a_1 t + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2}a_0\right)t^2 + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{6}a_0\right)t^3 + \frac{1}{6}a_0 t^4 + \dots + a_n t^n + \dots$$

$$(9) a_n = \frac{e - a_{n-3}(n-2)!}{n!} \quad (n \geq 3)$$

$$y = 1 + 2(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e-1}{6}(x-1)^3 + \frac{e-4}{24}(x-1)^4 + \dots + a_n (x-1)^n + \dots$$

$$(10) a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} - \frac{n-5}{n(n-1)} a_{n-2} - \frac{2}{n(n-1)} a_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

$$y = 2 - 2(x+1) + 2(x+1)^2 - \frac{2}{3}(x+1)^3 + \frac{1}{3}(x+1)^4 + \dots$$



**פרק 5.2 – פתרון מד"ר בעזרת טורים סביב נקודה סינגולרית-רגולרית**

- (1) נתונה מד"ר מהתבנית  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  שעבורה הנקודה  $x = 0$  היא נקודה סינגולרית-רגולרית. הסבר כיצד פותרים את המד"ר על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב הנקודה  $x = 0$ . (הנח כי  $p, q$  פולינומים או מנה של פולינומים).

עבור כל אחת מהמשוואות הבאות הראה שהנקודה  $x = 0$  היא נקודה סינגולרית רגולרית ופתור את המשוואה על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות בסביבת הנקודה.

$$3x^2 y'' + 2xy' + x^2 y = 0 \quad (2)$$

$$2x^2 y'' + 7x(x+1)y' - 3y = 0 \quad (3)$$

$$2x^2 y'' - xy' + (x-5)y = 0 \quad (4)$$

$$3x^2 y'' - xy' + y = 0 \quad (5)$$

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0 \quad (6)$$

$$x^2 y'' - xy' + y = 0 \quad (7)$$

$$x^2 y'' + x(x+2)y' - 2y = 0 \quad (8)$$

$$x^2 y'' + x(x-2)y' + 2y = 0 \quad (9)$$

הערה: בשאלות 2-5 הפתרונות של המשוואה האינדיציאלית שונים והפרשם אינו מספר שלם. בשאלות 6,7 הפתרונות שווים ובשאלות 8,9 הפתרונות שונים והפרשם מספר שלם.

**תשובות:**

$$(2) \quad y = k_1 x^{1/3} \left( 1 - \frac{1}{14} x^2 + \frac{1}{728} x^4 + \dots \right) + k_2 \left( 1 - \frac{1}{10} x^2 + \frac{1}{440} x^4 + \dots \right)$$

$$(3) \quad y = k_1 x^{1/2} \left( 1 - \frac{7}{18} x^1 + \frac{147}{792} x^2 + \dots \right) + k_2 x^{-3} \left( 1 - \frac{21}{5} x^1 + \frac{49}{5} x^2 - \frac{343}{15} x^3 \right)$$

$$(4) \quad y = k_1 x^{-1} \left( 1 + \frac{1}{5} x + \frac{1}{30} x^2 + \frac{1}{90} x^3 + \dots \right) + k_2 x^{2.5} \left( 1 - \frac{1}{9} x + \frac{1}{198} x^2 - \frac{1}{7722} x^3 + \dots \right)$$

$$(5) \quad y = k_1 x + k_2 x^{1/3}$$

$$(6) \quad y = k_1 \left( 1 - \frac{1}{2^2} x^2 + \frac{1}{4^2 \cdot 2^2} x^4 + \dots \right) + k_2 \left[ \ln x \cdot \left( 1 - \frac{1}{2^2} x^2 + \frac{1}{4^2 \cdot 2^2} x^4 + \dots \right) + \left( \frac{2}{2^3} x^2 + \frac{-12}{4^3 \cdot 2^3} x^4 + \dots \right) \right]$$

$$(7) \quad y(x) = k_1 x + k_2 x \ln x \quad (8) \quad y(x) = \frac{k_1}{x^2} \left( 1 - x + \frac{1}{2} x^2 - e^{-x} \right) + \frac{k_2}{x^2} e^{-x}$$

$$(9) \quad y = -a_0 x^2 \ln x \left( 1 - x + \frac{1}{2} x^2 + \dots \right) + a_0 x \left( 1 - x^2 - \frac{3}{4} x^3 + \dots \right)$$

## פרק 6.1 – התמרת/טרנספורם לפלס

(1) הגדר והדגם את המושג התמרת לפלס.

חשב את התמרות לפלס הבאות בעזרת טבלת התמרות לפלס:

$$L(\cosh 4t) \quad (5) \quad L(e^{-4t} + 10e^{2t}) \quad (4) \quad L\left(\frac{1}{2}t^4 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t} + 1\right) \quad (3) \quad L(t^2 + 4t - 2) \quad (2)$$

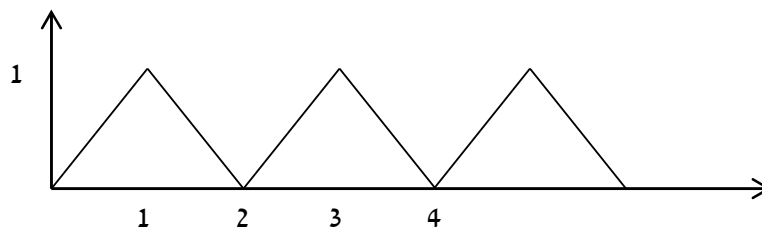
$$L(\sin^2 t) \quad (9) \quad L(\sin 2t \cos 3t) \quad (8) \quad L(\sin 2t \cos 2t) \quad (7) \quad L(\sinh 10t) \quad (6)$$

$$L(e^{2t} \sin 4t) \quad (13) \quad L(t^4 e^{2t}) \quad (12) \quad L(t^2 \sin 4t) \quad (11) \quad L(\cos^2 4t) \quad (10)$$

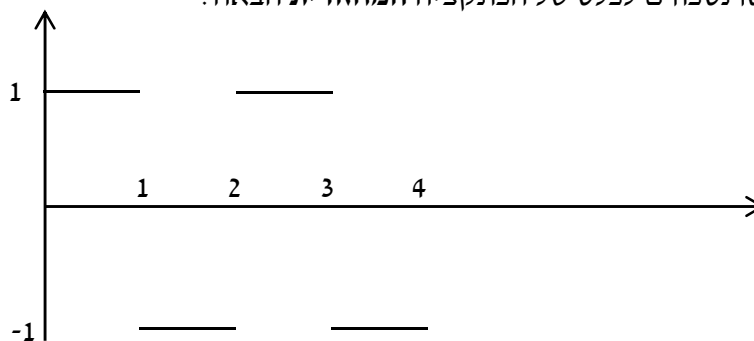
$$g(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 1 \\ 1 & 1 < t \end{cases} \quad (14) \quad \text{מצא טרנספורם לפלס של הפונקציה}$$

$$g(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 1 \\ 2-t & 1 < t \end{cases} \quad (15) \quad \text{מצא טרנספורם לפלס של הפונקציה}$$

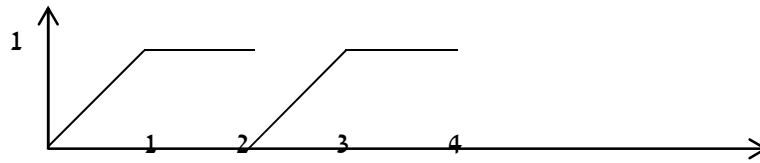
(16) מצא טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה:



(17) מצא טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה:



18 מצא טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה :



19 הגדר ושרטט את פונקציית המדרגה  $u(t)$  ואת ההזזה שלה  $u(t-k)$ .

20 שרטט את הפונקציה  $f(t) = u(t-2) - u(t-3)$ , כאשר  $u(t)$  פונקציית המדרגה.

21 רשום את הפונקציה  $f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 4 \\ 1 & t > 4 \end{cases}$  בעזרת פונקציית המדרגה.

22 רשום את הנוסחה להתמרת לפלס של פונקציית המדרגה  $u(t)$ , של הפונקציה  $u(t-k)$

ושל הפונקציה  $f(t-k)u(t-k)$ .

23 חשב את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה  $g(t) = \begin{cases} 0 & t < 4 \\ (t-4)^2 & t \geq 4 \end{cases}$

24 חשב את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה  $g(t) = \begin{cases} 0 & t < 4 \\ t^2 & t \geq 4 \end{cases}$

### תשובות:

- (2)  $\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} - \frac{2}{s}$  (3)  $\frac{12}{s^5} + s^{-3/2} + \frac{1}{s}$  (4)  $\frac{1}{s+4} + 10\frac{1}{s-2}$  (5)  $\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s-4} + \frac{1}{s+4} \right]$   
 (6)  $\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s-10} - \frac{1}{s+10} \right]$  (7)  $\frac{1}{2} \frac{4}{s^2+16}$  (8)  $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{s^2+25} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2+1}$  (9)  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+4}$   
 (10)  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+64}$  (11)  $\frac{8(3s^2-16)}{(s^2+16)^3}$  (12)  $\frac{24}{(s-2)^5}$  (13)  $\frac{4}{(s-2)^2+16}$  (14)  $\frac{1-e^{-s}}{s^2}$   
 (15)  $\frac{1-2e^{-s}}{s^2}$  (16)  $\frac{1-2e^{-s}+e^{-2}}{s^2(1-e^{-2s})}$  (17)  $\frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})}$  (18)  $\frac{1-e^{-s}-se^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})}$   
 (21)  $f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 4 \\ 1 & t > 4 \end{cases} = u(t-4)$  (23)  $\frac{2e^{-4s}}{s^3}$  (24)  $\frac{2e^{-4s}(8s^2+4s+1)}{s^3}$

## פרק 6.2 – התמרת לפלס ההפוכה ומשפט הקונוולוציה

חשב את התמרת לפלס ההפוכה :

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s-10}\right) \quad (3) \qquad L^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right) \quad (2) \qquad L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) \quad (1)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s-10)^2+4}\right) \quad (6) \qquad L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) \quad (5) \qquad L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) \quad (4)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4)^2}\right) \quad (9) \qquad L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right) \quad (8) \qquad L^{-1}\left(\frac{s}{(s-2)^2+4}\right) \quad (7)$$

$$L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^2+5s}\right) \quad (12) \qquad L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-4}\right) \quad (11) \qquad L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) \quad (10)$$

$$L^{-1}\left(\frac{6s^2+4s-6}{s^3-7s-6}\right) \quad (15) \qquad L^{-1}\left(\frac{s^2+s-1}{s^3-s}\right) \quad (14) \qquad L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+5s+6}\right) \quad (13)$$

$$L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^3+s^2}\right) \quad (18) \qquad L^{-1}\left(\frac{8s}{(s-2)^2(s+2)}\right) \quad (17) \qquad L^{-1}\left(\frac{10s}{s^4-13s^2+36}\right) \quad (16)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s+3}\right) \quad (21) \quad L^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2(s-4s+4)}\right) \quad (20) \qquad L^{-1}\left(\frac{9s+36}{s^3+6s^2+9s}\right) \quad (19)$$

$$L^{-1}\left(\frac{2s^2+2s+1}{(s^2+1)(s+2)}\right) \quad (24) \qquad L^{-1}\left(\frac{2s^2+s-1}{(s^2+1)(s-3)}\right) \quad (23) \qquad L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right) \quad (22)$$

$$L^{-1}\left(\frac{3}{s}-\frac{4e^{-s}}{s^2}+\frac{4e^{-3s}}{s^2}\right) \quad (27) \qquad L^{-1}\left(\frac{25s^2}{(s-1)(s^2+4)^2}\right) \quad (26) \qquad L^{-1}\left(\frac{3}{(s^2+1)(s^2+4)}\right) \quad (25)$$

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-10s}}{(s-1)(s-2)}\right) \quad (29) \qquad L^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s+1}+\frac{e^{-2s}}{s^2+1}\right) \quad (28)$$

• בשאלה 27 הוסף סעיף ב המבקש לשרטט את הפתרון.

$$(30) \text{ נתון } F(s) = \frac{e^{-s} + 2}{s} \text{ חשב את } f(0) \text{ ו- } f(\infty) \text{ כאשר } f(t) = L^{-1}(F(s)).$$

פתור בשתי דרכים שונות.

$$\text{הערה: } f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \quad , \quad f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$$

(31) הסבר והדגם את משפט הקונוולוציה.

השתמש במשפט הקונוולוציה כדי לחשב:

$$L^{-1}\left(\frac{2}{s^2(s^2+4)}\right) \quad (33) \quad L^{-1}\left(\frac{1}{s^3(s-4)}\right) \quad (32)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)^2}\right) \quad (35) \quad L^{-1}\left(\frac{1}{s(s-4)^2}\right) \quad (34)$$

### תשובות:

- (1) 1 (2)  $\frac{t^3}{3!}$  (3)  $e^{10t}$  (4)  $\frac{1}{3} \sin 2t$  (5)  $\cos 2t$  (6)  $e^{10t} \frac{1}{2} \sin 2t$  (7)  $e^{2t} \left\{ \cos 2t + 2 \frac{1}{2} \sin 2t \right\}$   
 (8)  $\frac{1}{4} t \sin 2t$  (9)  $\frac{1}{2 \cdot 2^3} (\sin 2t - 2t \cos 2t)$  (10)  $\frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{x}}$  (11)  $\frac{1}{4} e^{2t} - \frac{1}{4} e^{-2t}$  (12)  $1 - 2e^{-5t}$   
 (13)  $3e^{-3t} - 2e^{-2t}$  (14)  $1 + \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t}$  (15)  $e^{-t} + 2e^{-2t} + 3e^{3t}$  (16)  $e^{-3t} + e^{3t} - e^{-2t} - e^{2t}$   
 (17)  $e^{2t} + 4te^{2t} - e^{-2t}$  (18)  $-6 + 5t + 6e^{-2t}$  (19)  $4 - 4e^{-3t} - 3te^{-3t}$  (20)  $2e^t + te^t - 2e^{2t} + te^{2t}$   
 (21)  $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \sin \sqrt{2}t$  (22)  $\frac{1}{\sqrt{0.75}} e^{-0.5t} \sin \sqrt{0.75}t$  (23)  $\sin t + 2e^{3t}$  (24)  $\cos t + e^{-2t}$  (25)  $\sin t - \frac{1}{2} \sin 2t$   
 (26)  $e^t - \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t + 5t \sin 2t + \frac{5}{4} (\sin 2t - 2t \cos 2t)$  (27)  $3 - 4u(t-1) \cdot (t-1) + 4u(t-3) \cdot (t-3)$   
 (28)  $u(t-4)e^{-(t-4)} + u(t+2)\sin(t+2)$  (29)  $u(t-10)(e^{t-10} - e^{2(t-10)})$  (30)  $f(0) = 2 \quad f(\infty) = 3$   
 (32)  $-\frac{1}{2}(t^2 + 2t + 2) + e^t$  (33)  $0.5t - \frac{1}{4} \sin 2t$  (34)  $\frac{1}{4} e^{4t}(t-1) + \frac{1}{4}$  (35)  $\frac{1}{2}(-2 \cos t + 2 - t \sin t)$

**פרק 6.3 – פתרון מד"ר בעזרת התמרת לפלס**

1) א. הסבר והדגם כיצד פותרים משוואה לינארית, מסדר שני, לא הומוגנית במקדמים קבועים

על ידי התמרת לפלס.

ב. הסבר כיצד פועלים אם המד"ר מסדר כלשהו.

פתור את המשוואות הבאות בעזרת התמרת לפלס

$$y(0) = 0 ; y' + 4y = e^{-3t} \quad (2)$$

$$y(0) = -1, y'(0) = 4 ; y'' + 4y' + 4y = 10e^{-2t} \quad (3)$$

$$y(0) = -1, y'(0) = -4 ; y'' - 4y' = 16 \quad (4)$$

$$y(0) = y'(0) = 0 ; y'' + 4y' = 8t + 2 \quad (5)$$

$$y(0) = y'(0) = \frac{1}{4} ; 4y'' - 4y' = te^t + e^t \quad (6)$$

$$y(0) = y'(0) = 0 ; y'' - 3y' + 2y = u(t-4) \quad (7)$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \text{ כאשר היא פונקציית המדרגה.}$$

$$u(t-4) = u_4(t) \text{ הערה: יש המסמנים}$$

$$y(0) = y'(0) = 0 ; y'' + y' = f(t) \quad (8)$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 2 & t \geq 1 \end{cases} \text{ כאשר}$$

$$y(0) = y'(0) = 0 ; y'' + 5y' + 6y = h(t) \quad (9)$$

$$h(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases} \text{ כאשר}$$

$$y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 3 ; y''' + 4y'' + 5y' + 2y = 10\cos t \quad (10)$$

**תשובות:**

$$(2) \quad y(t) = e^{-3t} - e^{-4t} \quad (3) \quad y(t) = e^{-2t}(5t^2 + 2t - 1) \quad (4) \quad y(t) = -4t - 1 \quad (5) \quad y(t) = t^2$$

$$(6) \quad y(t) = \frac{1}{8}e^t(t^2 + 2) \quad (7) \quad y(t) = u(t-4)(0.5 - e^{t-4} + e^{2(t-4)})$$

$$(8) \quad y(t) = 2u(t-1) \cdot (-1 + (t-1) + e^{-(t-1)})$$

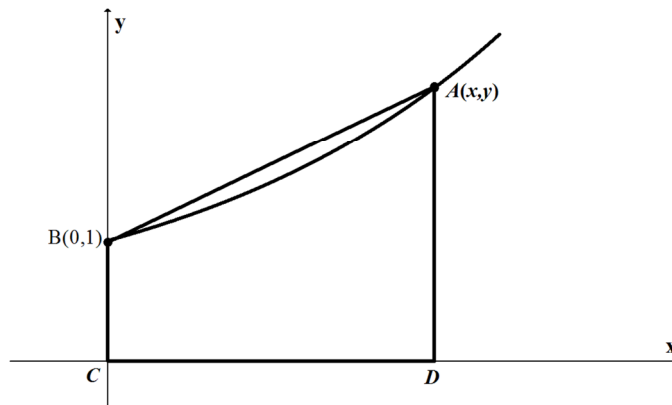
$$(9) \quad y(t) = \frac{1}{6}[1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t}] - u(t-2)\frac{1}{6}[1 - 3e^{-2(t-2)} + 2e^{-3(t-2)}]$$

$$(10) \quad y(t) = -\cos t + 2\sin t + 2e^{-t} - 2te^{-t} - e^{-2t}$$



**פרק 7 – שימושים של משוואות דיפרנציאליות**

- (1) על עקום מסוים ידוע שהשיפוע של המשיק בכל נקודה  $(x, y)$  על העקום שווה ל- $-\frac{x}{y}$ . מצא את משוואת העקום.
- (2) נתון עקום, ברביע הראשון, העובר בנקודה  $(1, 3)$  ושיפוע המשיק אליו בנקודה  $(x, y)$  שווה ל- $-\left(1 + \frac{y}{x}\right)$ . מצא את משוואת העקום.
- (3) מצא את משוואת העקום העובר דרך הנקודה  $(1, 2)$  ושכל נקודה  $(x, y)$  שעליו שיפוע הנורמל הוא  $\frac{2xy}{y^2 - x^2}$ .
- (4) מצא את משוואת העקום שהנורמל שלו בכל נקודה עובר בראשית.
- (5) מצא את משוואת העקום ששיפוע המשיק לו בכל נקודה שווה למחצית שיפוע הקטע מהראשית לנקודה.
- (6) נתון עקום, ברביע הראשון, העובר בנקודה  $(2, 4)$ . נתון כי ההפרש בין שיפוע המשיק לגרף העקום בנקודה  $A(x, y)$  שעליו ובין שיפוע הישר המחבר את  $A$  עם ראשית הצירים שווה לשיעור ה- $y$  של הנקודה  $A$ .
- (7) מצא את משוואת העקום המאונך לישר העובר דרך נקודה כלשהי על העקום ודרך הנקודה  $(3, 4)$ , אם ידוע שהעקום עובר גם דרך הראשית.
- (8) קטע הנורמל לעקום בנקודה  $(x, y)$  שבין נקודה זו וציר  $x$  נחצה ע"י ציר  $y$ . מצא את משוואת עקום זה.
- (9) מצא את העקום העובר דרך הנקודה  $(0, 1)$  כך שהמשולש המוגבל על ידי ציר  $y$ , המשיק לעקום בנקודה כלשהי שעליו  $M(x, y)$  והקטע  $OM$  מהראשית  $O$  ל- $M$  הוא משולש שווה שוקיים שבסיסו הקטע  $MN$ .  $N$  היא הנקודה בה המשיק הנ"ל חותך את ציר  $y$ . צייר ציור מתאים ברביע הראשון הממחיש את הבעיה.
- (10) נתון עקום העובר בנקודה  $(0, 1)$ . בכל נקודה  $A$  שעל העקום שווה שיפוע העקום לשטחו של הטרפז  $ABCD$  הנראה בציור. מהי משוואת העקום.



11 מצא את משפחת העקומות האורתוגונליות למשפחות העקומות הבאות :

(א)  $2 \ln x + \ln y = c$

(ב)  $xy = c$

(ג)  $x^2 + 2y^2 = c$

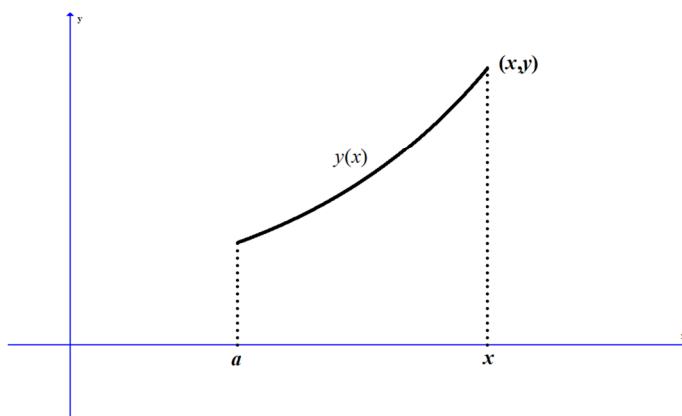
בפרט, מצא את העקומה האורתוגונלית לעקומה  $x^2 + 2y^2 = 9$  בנקודה (1,2). שרטט.

(ד)  $x^2 + y^2 = cx$

12 מצא את משפחת העקומות היוצרות זווית של 45 מעלות עם משפחת המעגלים  $x^2 + y^2 = c$ .

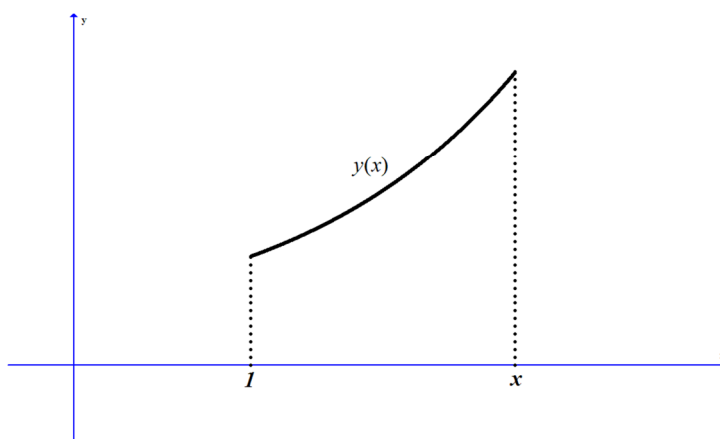
13 שטח  $S$  מוגבל ע"י עקום  $y = y(x)$ , ציר ה- $x$ ,  $x = a$  ו  $x$  משתנה (ראה ציור).  
ידוע כי השטח  $S$  פרופורציונלי לאורך הקשת בין הנקודות  $(a, y(a))$  ו-  $(x, y(x))$ .

מצא את משוואת העקום.



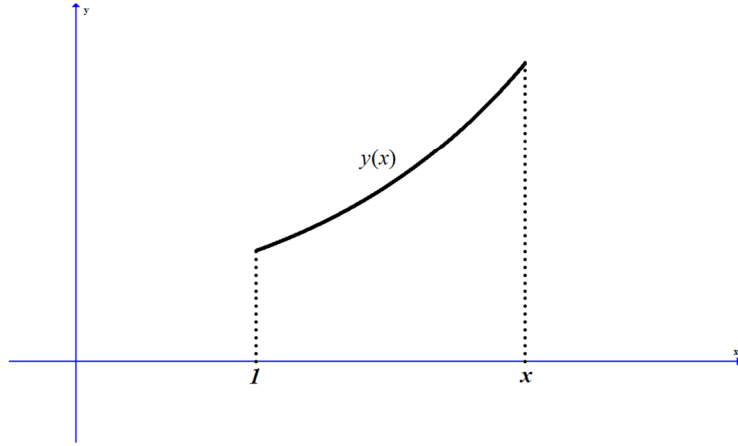
14 שטח  $S$  מוגבל ע"י עקום  $y = y(x)$ , ציר ה- $x$ ,  $x = 1$  ו  $x$  משתנה.  
ידוע כי  $y(1) = 2$  (ראה ציור).

האם קיים עקום כזה ששטחו של  $S$  שווה ל-  $2y(x)$ .



15) שטח  $S$  מוגבל ע"י עקום  $y = y(x)$ , ציר ה- $x$ ,  $x = 1$  ו- $x$  משתנה. ידוע כי  $y(1) = 2$  (ראה ציור).

האם קיים עקום כזה ששטחו של  $S$  שווה ל- $y(x) - 2$ .



16) נניח שכמות  $y(t)$  גדלה (דועכת) אקספוננציאלית (מעריכית), כלומר בכל רגע קצב הגידול (הדעיכה) שלו פרופורציונלי לערכו. נניח שבזמן התחלתי מסוים  $t = 0$  הכמות היא  $y_0$  ונניח שקבוע הפרופורציה הוא  $k$  מצא נוסחה עבור הכמות בכל זמן  $t$ .

17) קצב הריבוי הטבעי העולמי הוא 2% בשנה. ידוע כי בשנת 1980 היו בעולם 4 מיליארד איש.  
 א. כמה אנשים היו בעולם בשנת 2010?  
 ב. כמה אנשים היו בעולם בשנת 1974?  
 ג. באיזה שנה יהיו בעולם 50 מיליארד אנשים?

הנח שאוכלוסיית העולם גדלה מעריכית ( כלומר שבכל רגע קצב הגידול פרופורציוני לערכו).

18) האוכלוסיה בעיר מסוימת גדלה מעריכית. בשנה מסוימת היו בעיר 400 אלף תושבים ואחרי 4 שנים היו 440 אלף תושבים.  
 א. מצא את אחוז הגידול השנתי  
 ב. מצא כעבור כמה שנים (החל מהשנה המסוימת) היו בעיר 550 אלף תושבים.

19) אדם הפקיד סכום כסף בבנק בריבית דריבית שנתית של 4%. כעבור 5 שנים הצטברו לאדם 5000 ש"ח.  
 א. כמה כסף הפקיד האדם.  
 ב. כעבור כמה שנים יהיו לאדם 7000 ש"ח?

20) מספר חיות הבר בעין גדי גדל בצורה מעריכית. בספירה ראשונה היו 1000 חיות. בספירה שנייה שנעשתה כעבור 20 חודשים היו 1400 חיות בר. מצא אחרי כמה חודשים החל מהספירה הראשונה היו בשמורה 2000 חיות בר?

21) ליסוד הרדיואקטיבי פחמן 14 יש זמן מחצית חיים של 5750 שנים.  
 ידוע כי קצב ההתפרקות הרגעי של היסוד פרופורציוני לכמותו הנמצאת באותו הרגע.  
 א. כמה גרמים של יסוד זה ישרדו אחרי 1000 שנים מכמות התחלתית של 100 גרם?  
 ב. כעבור כמה שנים תישאר כמות של 10 גרם מכמות התחלתית של 100 גרם?

22) בבריכה אחת יש 240 טון דגים וכמות הדגים שבה גדלה ב- 4% כל שבוע. בבריכה שנייה יש 200 טון דגים וכמות הדגים שבה גדלה ב- 10% כל שבוע.

- א. בעוד כמה שבועות תהיינה כמויות הדגים בשתי הבריכות שוות?  
 ב. בעוד כמה שבועות תהיה כמות הדגים שבבריכה השנייה גדולה פי 2 מכמות הדגים שבבריכה הראשונה?

23) בזמן  $t = 0$  יש במיכל 2 ק"ג מלח מומסים ב-500 ליטר מים. נניח שמי מלח בריכוז של 0.2 ק"ג מלח לליטר מים מוזרמים לתוך המיכל, בקצב של 25 ליטר לדקה, ושהתמיסה המעורבת מנוקזת החוצה מן המיכל באותו קצב. חשב את כמות המלח במיכל לאחר 10 דקות.

24) סירה נגררת בקצב של 12 קמ"ש. ברגע  $t = 0$  כשכבל הגרירה מנותק, מתחיל אדם, הנמצא בסירה לחדור בכיוון התנועה ומפעיל כח של 20 ק"ג על הסירה. אם משקל החותר והסירה הוא 480 ק"ג וההתנגדות (ק"ג) שווה ל-  $1.75v$  באשר  $v$  נמדדת ב- מטר/שעה, מצא את מהירות הסירה כעבור חצי דקה.

25) חוק הקירור של ניוטון קובע כי הקצב בו גוף מתקרר פרופורציונאלי להפרש בין טמפרטורת הגוף וטמפרטורת הסביבה. חומר בעל טמפרטורה של 150 מעלות נמצא בכלי בעל טמפרטורת אוויר קבועה השווה ל- 30 מעלות. החומר מתקרר לפי חוק הקירור של ניוטון ולאחר כחצי שעה יורדת טמפרטורת החומר ל- 70 מעלות.

- א. מהי טמפרטורת החומר לאחר כשעה?  
 ב. כעבור כמה זמן תהיה טמפרטורת החומר 40 מעלות?

26) נתון מיכל בצורת גליל שרדיוס בסיסו 1 ס"מ וגובהו 4 ס"מ. הגליל מלא במים. ברגע מסוים פותחים ברז בתחתית הגליל והמים זורמים החוצה בקצב שפרופורציונאלי לשורש מגובהם. נסמן ב-  $h(t)$  את גובה פני המים וב-  $k$  את קבוע הפרופורציה.

- א. רשום מד"ר עבור גובה פני המים,  $h(t)$ . מהו תנאי ההתחלה של הבעיה?  
 ב. ידוע כי  $k = -2\pi$ . פתור את המד"ר. תוך כמה זמן תישאר בגליל מחצית מכמות המים ההתחלתית?

27) כדור שלג שרדיוסו ההתחלתי 4 ס"מ נמס כך שהקצב שבו רדיוסו קטן פרופורציונאלי לשטח פניו. לאחר כחצי שעה רדיוס הכדור שווה ל- 3 ס"מ.

- א. רשום נוסחה שתתאר את רדיוס הכדור בזמן  $t$ .  
 ב. כעבור כמה זמן יהיה נפח כדור השלג  $1/64$  מנפחו ההתחלתי?

28) מבלון מלא אוויר שרדיוסו  $R$  מתחיל לצאת אוויר. קצב יציאת האוויר הוא  $-3V(t)$  כאשר  $V(t)$  הוא נפח הבלון בזמן  $t$ . הוכח כי כעבור  $\ln 2$  שניות ייקטן נפח הבלון לכדי שמינית מנפחו התחלתי?

**תשובות :**

- (1)  $x^2 + y^2 = k$  (2)  $2xy + x^2 = 7$  (3)  $x^3 - 3y^2x = 11$  (4)  $x^2 + y^2 = k$   
 (5)  $y^2 = ax$  (6)  $y = 2xe^{x-2}$  (7)  $y = 4 \pm \sqrt{25 - (x-3)^2}$   
 (8)  $2x^2 + y^2 = k$  (9)  $2 = y + \sqrt{y^2 + x^2}$  (10)  $y = 2e^{x^{1/4}} - 1$   
 (11) (א)  $2y^2 - x^2 = k$  (ב)  $y^2 - x^2 = k$  (ג)  $y = ax^2$  ,  $y = 2x^2$   
 (ד)  $y = m(x-c)^2$   $y > 0$  (12)  $\ln|x| + \frac{1}{2} \ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right) = -\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c$   
 (13)  $y = k \cosh\left(\pm \frac{1}{k}x + C\right)$  (14) לא (15) כן (16)  $y(t) = y_0 e^{kt}$   
 (17) (א)  $4 \cdot e^{0.02 \cdot 30} \approx 7.28_{mil}$  (ב)  $4 \cdot e^{0.02 \cdot (-6)} \approx 4.51_{mil}$  (ג) 2106 שנים  
 (18) (א) 2% (ב) 15.92 שנים (19) (א) 4093.65 ש"ח (ב) 13.41 שנים  
 (20) 40.77 חודשים (21) (א) 88.69 גרם (ב) 19188 שנים  
 (22) (א) 3.04 שנים (ב) 14.6 שנים (23) (א) 26.75 ק"ג (ב) 0.942 דקות  
 (24) (א) 4.09 מטר לשנייה (ב) 72 שניות (ג) 10 מטר לשנייה (25) (א)  $43\frac{1}{3}$   
 (ב) 1.13 שעות (26) (א)  $h(0) = 4$  ,  $\pi h'(t) = k\sqrt{h(t)}$  (ב)  $\sqrt{2} + 2$   
 (27) (א)  $R(t) = \frac{12}{2t+3}$  (ב) 4.5 שעות

נוסחאות – נגזרות

1.  $y = a \rightarrow y' = 0$
2.  $y = f^n \rightarrow y' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$
3.  $y = e^f \rightarrow y' = e^f \cdot f'$
4.  $y = a^f \rightarrow y' = a^f \cdot f' \cdot \ln a$
5.  $y = \ln f \rightarrow y' = \frac{1}{f} \cdot f'$
6.  $y = \sin f \rightarrow y' = \cos f \cdot f'$
7.  $y = \cos f \rightarrow y' = -\sin f \cdot f'$
8.  $y = \tan f \rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 f} \cdot f'$
9.  $y = \cot f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sin^2 f} \cdot f'$
10.  $y = \arcsin f \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
11.  $y = \arccos f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
12.  $y = \arctan f \rightarrow y' = \frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
13.  $y = \operatorname{arccot} f \rightarrow y' = -\frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
14.  $y = \sinh f \rightarrow y' = \cosh f \cdot f'$
15.  $y = \cosh f \rightarrow y' = \sinh f \cdot f'$
16.  $y = \tanh f \rightarrow y' = \frac{1}{\cosh^2 f} \cdot f'$
17.  $y = \operatorname{coth} f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sinh^2 f} \cdot f'$
18.  $y = f(x)^{g(x)} \rightarrow y' = f(x)^{g(x)} \cdot (g(x) \cdot \ln(f(x)))'$

נוסחאות – אינטגרלים

$$\int a dx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \frac{k^{ax+b}}{\ln k} + c$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$$

$$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos(ax+b)| + c$$

$$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln |\sin(ax+b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \left( \frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \left( \frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \cot x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln |f| + c$$

$$\int e^f \cdot f' dx = e^f + c$$

$$\int \sin f \cdot f' dx = -\cos(f) + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f' dx = \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int f \cdot f' dx = \frac{1}{2} f^2 + c$$

$$\int \cos f \cdot f' dx = \sin(f) + c$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}} dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

נוסחאות – טריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{cases}$$

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ x = (\pi - \alpha) + 2\pi k \end{cases}$$

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ x = -\alpha + 2\pi k \end{cases}$$

$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = \alpha + \pi k$$

$$\cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = \alpha + \pi k$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$



נוסחאות – אלגברה

$$\left\{ \begin{array}{l} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \\ a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \\ a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab) \\ a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 \\ a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^m a^n = a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ (a^m)^n = a^{mn} \\ (ab)^n = a^n b^n \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \\ a^0 = 1 \\ a^{-n} = \frac{1}{a^n} \\ \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \\ e^x = b \Rightarrow x = \ln b \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a > 0, b > 0 \\ \ln a + \ln b = \ln ab \\ \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \\ \ln 1 = 0, \ln e = 1 \\ \ln e^n = n \\ \ln x^n = n \ln x \quad (x > 0) \\ e^{\ln x} = x \\ e^{k \ln x} = x^k \\ e^{-k \ln x} = \frac{1}{x^k} \\ a^b = e^{b \ln a} \\ \ln x = k \Rightarrow x = e^k \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} |a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0 \\ -a & \text{if } a < 0 \end{cases} \\ |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \\ \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \\ |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \\ |x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ or } x > a \end{array} \right.$$

**נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות**

<u>טור מקלורן</u>	<u>תחום התכנסות</u>
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$-1 \leq x \leq 1$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$	$-1 < x < 1$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$	$-1 \leq x \leq 1 \quad (m > 0)$
	$-1 < x \leq 1 \quad (-1 < m < 0)$
$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$	$-1 < x < 1 \quad (m \leq -1)$
	$m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$

נוסחאות – התמרת לפלס

$G(s)$	$g(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	$t$
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n$ (for $n = 1, 2, 3\dots$ )
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ (for $n = 1, 2, 3\dots$ )
$\frac{1}{s-a}$	$e^{at}$
$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}$
$\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$	$t^{n-1} e^{at}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(at)$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh(at)$
$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{t}{2a} \sin(at)$
$\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a} (\sin(at) + at \cos(at))$

$\frac{a}{[(s+b)^2 + a^2]}$	$e^{-bt} \sin at$
$\frac{s+b}{[(s+b)^2 + a^2]}$	$e^{-bt} \cos at$
$\frac{2sa}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \sin at$
$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \cos at$
$\frac{1}{(s-a)^2}$	$te^{at}$
$\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3} (\sin(at) - at \cos(at))$
$\frac{1}{2} \sqrt{\pi} s^{-3/2}$	$\sqrt{t}$
$\sqrt{\pi} s^{-1/2}$	$\frac{1}{\sqrt{t}}$
$\frac{1}{s}$	$u(t)$
$\frac{e^{-ks}}{s}$	$u(t-k)$
$e^{-ks} \cdot F(s)$	$u(t-k) f(t-k)$
$(-1)^n (F(s))^{(n)}$	$t^n g(t)$
$e^{-ks}$	$\delta(t-k)$

תכונות נוספות

$$L[ag(t) + bh(t)] = aL[g(t)] + bL[h(t)] \quad (1)$$

$$L^{-1}[aG(s) + bH(s)] = aL^{-1}[G(s)] + bL^{-1}[H(s)] \quad (2)$$

$$L^{-1}[F(s)] = e^{-at}L^{-1}[f(s-a)] \quad , \quad L^{-1}[F(s)] = e^{at}L^{-1}[f(s+a)] \quad (3)$$

$$L[ay'(t) + by(t)] = Y(s)[as + b] - y(0)[a] \quad (4)$$

$$L[ay''(t) + by'(t) + cy(t)] = Y(s)[as^2 + bs + c] - y(0)[as + b] - y'(0)[a]$$

$$L[ay'''(t) + by''(t) + cy'(t) + dy(t)] =$$

$$Y(s)[as^3 + bs^2 + cs + d] - y(0)[as^2 + bs + c] - y'(0)[as + b] - y''(0)[a]$$

$$L[ay''''(t) + by'''(t) + cy''(t) + dy'(t) + ey(t)] =$$

$$Y(s)[as^4 + bs^3 + cs^2 + ds + e] - y(0)[as^3 + bs^2 + cs + d] - y'(0)[as^2 + bs + c] - y''(0)[as + b] - y'''(0)[a]$$

לדף התמרות לפלס מורחב

[http://www.gool.co.il/laplace\\_table.pdf](http://www.gool.co.il/laplace_table.pdf)