טופולוגיה – 05 222 - 88 – סמסטר ב' תש"ף, 02.08.20 מבחן מועד א'
מרצה: פרופסור מיכאל מגרל מתרגלים: תמר בר-און, עידו שפרינגר

הנחיות:

- המבחן יתקיים בעזרת מערכת מודל ומפגש zoom עם ציון מספרי אחרי הבדיקה.
- לפני קבלת שאלונים כל אחד חייב לרשום ב chat של זום מספר תעודת זהות.
  יתכן ותתבקשו להציג תעודת זהות.
- לרשום על הדף הראשון: שם, תעודת זהות,
  מספר תרגיל **שלא בחרתם ואם פתרתם שאלת הבונוס**.
- יש **לבחור בדיוק 4 מתוך 5** שאלות.
- בכל שאלה יש 2 סעיפים. כל סעיף שווה **13 נקודות**. שאלת הבונוס שווה 5 נקודות.
- לכן אפשר להגיע בס"ה ל 109 נקודות ! ☺ הציון הסופי לא יעבור את 100.
- אין להשתמש בכל חומר עזר. אסור להתכתב עם סטודנטים אחרים ב chat.
- בזמן המבחן כולם חייבים לפתוח מצלמות zoom.
- משך המבחן **שלוש שעות**. ועוד 15 דקות על הסריקה והעברת הקבצים.
- קובץ השאלות תקבלו דרך מערכת מודל.
- נסיים כתיבת הבמחן עד 15:30. אחרי סריקה אתם צריכים להעלות קבצים עד 15:45 דרך מודל כמו שעשיתם עם הבוחן.
- כמובן אפשר להתחיל העלאת קבצים גם לפני 15:30 מתי שתבחרו.
- יש תוספת זמן לסטודנטים מסוימים שקיבלו אישור ממדור בחינות.
- במקביל יהיו לנו ערוצי תקשורת נוספים (למשל אם יהיו בעיות תקשורת או עומס במודל) :
  א. מייל שלי ישיר megereli@math.biu.ac.il
  ב. וגם whatsapp 054-7845344
- שאלות למרצה להפנות דרך zoom או מייל.
- אתם יכולים לכתוב את המבחן בכתב יד ואז לסרוק. אפשר גם להקליד. יש עדיפות למסור את הקבצים שלכם בפורמט PDF.

- אנחנו משאירים את האופציה לבדוק את הטקסטים שלכם על "מקוריות מסמכים" דרך הכלים המתאימים. אופציונלי גם לבחון בעל פה סטודנטים מסוימים אחרי המבחן.

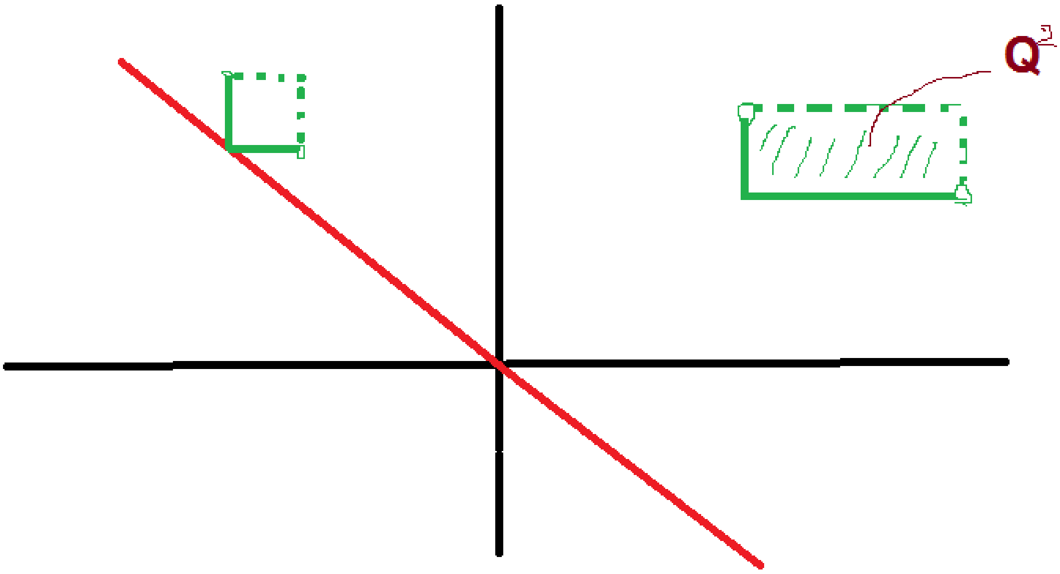
Bar-Ilan University
אוניברסיטת בר־אילן
Department of Mathematics

שאלות ותשובות:

1. א. נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$ באופן הבא: $(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)\Leftrightarrow x_1^{\ 2}+y_1=x_2^{\ 2}+y_2$
הוכיחו שמרחב מנה $\mathbb{R}^2/\sim$ הומיאומורפי ל $\mathbb{R}$.
ב. תנו דוגמה של מרחב ספרבילי האוסדורפי X עם תת מרחב Y לא ספרבילי כך ש Y תת קבוצה סגורה ב X.

<u>**פתרון**</u> א:
ראו הסברים בשיעורי בית 10 (שאלה 1)
http://www.math-wiki.com/images/2/27/TopMeg2020Ex10Sol.pdf
עם שינוי קל וסימטרי כאשר $(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)\Leftrightarrow x_1+y_1^{\ 2}=x_2+y_2^{\ 2}$.

<u>**פתרון**</u> ב:
כל ההסברים הדרושים חוץ מהסבר הסגירות אפשר למצוא בהרצאה 15.
ניקח "מישור סורגנפראי" $X:=(\mathbb{R},\tau_s)^2$
$\{[a,a+\varepsilon)\times[b,b+\delta):a,b\in\mathbb{R},\varepsilon>0,\delta>0\}$ בסיס לטופולוגיה שלו.



מישור סורגנפראי $(\mathbb{R},\tau_s)^2$ כן ספרבילי, $\mathbb{Q}^2$ צפוף בו.
הסיבה היא שכל אלמנט של בסיס פוגש את $\mathbb{Q}^2$
$[a,a+\varepsilon)\times[b,b+\delta)\cap\mathbb{Q}^2\supset(a,a+\varepsilon)\times(b,b+\delta)\cap\mathbb{Q}^2\neq\varnothing$.

נגדיר תת מרחב שלו $Y:=\{(x,-x)|\quad x\in\mathbb{R}\}\subset(\mathbb{R},\tau_s)^2$
אז כל נקודה שלו מבודדת ב Y כי
$[x,x+1)\times[-x,-x+1)\cap Y=\{(x,-x)\}$
לכן Y דיסקרטי. כל תת קבוצה בה היא סגורה. לכן צפופה בו רק Y
עצמו. העוצמה היא עוצמת הממשיים. המסקנה $Y\notin Sep$.

תת קבוצה Y **סגורה** ב $X:=(\mathbb{R},\tau_s)^2$ כי Y סגורה ב $\mathbb{R}^2$ (טופולוגיה רגילה) ופונקצית זהות $\mathrm{id}:(\mathbb{R},\tau_s)^2\to\mathbb{R}^2$ רציפה (נזכיר שטופולוגית סורגנפראי חזקה מטופולוגיה רגילה). מקור של סגור גם סגור. לכן Y סגור ב $X:=(\mathbb{R},\tau_s)^2$.
אפשרות אחרת להוכיח סגירות היא ישר דרך פתיחות של המשלים.
עוד אפשרות: להציג את Y כגרף של פונקציה רציפה $f(x)=-x\quad(\mathbb{R},\tau_s)\to(\mathbb{R},\tau_s)$.

2. א. הוכיחו או הפריכו: בין 4 מרחבים הבאים יש שניים שהומיאומורפיים אחד לשני

$$(S_2\setminus\{p\})\times\mathbb{Z}\quad \mathbb{R}\times[7,\infty)\quad \mathbb{N}\times(3,18)\times\mathbb{R}\times\mathbb{N}\quad \mathbb{Q}^3$$

(כאשר $p\in S_2\quad S_2=\{v\in\mathbb{R}^3:\ \|v\|=1\}$)

ב. נניח K מרחב טופולוגי קומפקטי. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:
(*) קיימות פונקציות רציפות $f_i:K\to\mathbb{R},\quad i\in\{1,2,\cdots,n\}$ כך שלכל נקודות שונות $x,y\in K$ מתקיים $f_m(x)\neq f_m(y)$ עבור $m\in\{1,2,\cdots,n\}$ מסוים.
(**) קיימת תת קבוצה סגורה וחסומה $Y\subset\mathbb{R}^n$ כך ש K הומיאומורפי ל Y.

פתרון א:
קודם כל 2 עובדות פשוטות שעוזרות לצמצם את האפשרויות.
- ברשימה יש רק מרחב אחד בן מנייה והוא $\mathbb{Q}^3$.
- ברשימה יש רק מרחב אחד קשיר והוא $\mathbb{R}\times[7,\infty)$.

לכן אנחנו מהר מאוד נשארים רק עם זוג איחיד ששווה בדיקה
$(S_2\setminus\{p\})\times\mathbb{Z}\qquad \mathbb{N}\times(3,18)\times\mathbb{R}\times\mathbb{N}$
נציין כמה עובדות שמרכיבים את ההוכחה בקלות:
- נזכיר ש $S_2\setminus\{p\}\simeq\mathbb{R}^2$ (הטלה סטראוגרפית).
- כמובן $(3,18)\simeq\mathbb{R}$. לכן $S_2\setminus\{p\}\simeq(3,18)\times\mathbb{R}$
- $\mathbb{Z}\simeq\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

(מרחבים דיסקרטיים עם אותה עוצמה הם הומיאומורפיים – כל פונקציה חח"ע ועל מתאימה)

- "שינוי סדר" במכפלה טופולוגית מגדיר הומיאומורפיזם.

<u>**פתרון**</u> ב:

$(*)\Leftarrow(**)$

פונקצית האלכסון

$$f:K\to\mathbb{R}^n \quad f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))$$

היא רציפה (למדנו בהרצאות).

הפונקציה $f:K\to\mathbb{R}^n$ היא חח"ע כי האוסף הנתון של פונקציות $f_i:K\to\mathbb{R},\quad i\in\{1,2,\cdots,n\}$ מפריד נקודות (למדנו בהרצאות).

$\mathbb{R}^n$ האוסדורפי ונתון ש K קומפקטי. לכן לפי משפט על השיכון (תוצאה של משפט על הסגירות) נקבל ש $f:K\to\mathbb{R}^n$ שיכון טופולוגי. זה אומר שפונקציה $f:K\to f(K)$ הומיאומורפיזם.

כעת נסמן $Y:=f(K)$. לפי משפט Heine-Borel ברור ש Y סגורה וחסומה ב $\mathbb{R}^n$.

אז הוכחנו את הכיוון הראשון.

$(*)\Rightarrow(**)$

נניח $h:K\to Y\subset\mathbb{R}^n$ הומיאומורפיזם. אוסף של כל ההטלות

$$\mathrm{p}_i:\mathrm{Y}\to\mathbb{R},\ y\mapsto \mathrm{p}_i(y)\quad i\in\{1,2,\cdots,n\}$$

מפריד נקודות של Y. פונקציה $h:K\to Y\subset\mathbb{R}^n$ הומיאומורפיזם.

אז גם אוסף ההרכבות

$$\mathrm{f}_i=\mathrm{p}_i\circ\mathrm{h}:\mathrm{K}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \mathrm{p}_i(\mathrm{h}(\mathrm{x}))\quad i\in\{1,2,\cdots,n\}$$

מפריד נקודות (כאן חשוב ש $h:K\to Y$ חח"ע).

כמובן האוסף הנ"ל מורכב מפונקציות **רציפות** $\mathrm{p}_i\circ\mathrm{h}:\mathrm{K}\to\mathbb{R}$ (כאן חשוב ש $h:K\to Y$ רציפה).

3. א. הוכיחו את המשפט הבא: קבוצת קנטור C הומיאומורפית למרחב מכפלה $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

ב. הוכיחו: מרחב מטרי $(\mathbb{Z},d_5)$ עם מטריקה 5-אדית הוא לא שלם, לא קשיר וקיימת ב $(\mathbb{Z},d_5)$ סדרה $\{a_n:\mathrm{n}\in\mathbb{N}\}$ עם איברים שונים כך ש $\lim a_n=2020$.

<u>**פתרון**</u> א: משפט עם הוכחה מהרצאה מספר 11.

פתרון ב: מרכיבים של פתרון היו בתירגול ובהרצאה. אני נותן כאן תשובה מקוצרת.
נגדיר $a_n := 2020 + 5^n$. אז $\lim a_n = 2020$.

למשל הסדרה $x_n := \sum_{k=0}^{n} 5^k$ היא סדרת קושי אבל (ראו הסבר בתירגול) לא מתכנסת ב $(\mathbb{Z}, d_5)$.

המרחב לא קשיר כי יש תת קבוצה סגוחה שהיא לא טריוויאלית (שונה מקבוצה ריקה ו $\mathbb{Z}$).
למשל כדור פתוח $B_1(0) = 5\mathbb{Z}$ הוא גם סגור כי הוא שווה לכדור סגור $B_{\frac{1}{5}}[0]$.

4. א. הוכיחו את המשפט הבא: $LComp \cap T_2 \subset T_{3.5}$.
(ניסוח מילולי: מרחב האוסדורפי קומפקטי מקומית הוא רגולרי לחלוטין)
ב. הוכיחו או הפריכו: $(ii)\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\quad (i)\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

פתרון א:
משפט עם הוכחה מהרצאה מספר 12.

פתרון ב:
א. משפט עם הוכחה מהרצאה.
ב. הוכחה של (i)
כיוון $\subseteq$
נניח בשלילה שקיים $x \in \overline{A \cup B} \wedge x \notin \overline{A} \cup \overline{B}$. אז $x \notin \overline{A} \wedge x \notin \overline{B}$.
קיימת סביבה $U \in N(x)$ כך ש $U \cap A = \varnothing$. קיימת סביבה $V \in N(x)$ כך ש $V \cap B = \varnothing$.
אז $(U \cap V) \cap (A \cup B) = \varnothing$. אבל $U \cap V \in N(x)$. קיבלנו ש $x \notin \overline{A \cup B}$ בסתירה להנחה.
כיוון $\supseteq$
נניח $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. צ"ל $x \in \overline{A \cup B}$.
ברור ש $x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}$. אם מתקיים $x \in \overline{A}$ אז
$$\forall U \in N(x) \quad U \cap A \neq \varnothing$$
כמובן
$$\forall U \in N(x) \quad U \cap (A \cup B) \neq \varnothing$$
זה מוכיח $x \in \overline{A \cup B}$.

הוכחה דומה אם $x\in\overline{B}$.

הפרכה של (ii)

במרחב $\mathbb{R}$ נגדיר $A=(0,1),\ B=(1,3)$. אז $A=(0,1),\ B=(1,3)$

$\overline{A\cap B}=\varnothing\neq\{1\}=\overline{A}\cap\overline{B}=[0,1]\cap[1,3]$

5. א. הוכיחו שבמרחב נורמי $(C[0,2],d_{\max})$ כל כדור סגור לא קומפקטי.
הסיקו ש $(C[0,2],d_{\max})$ לא קומפקטי מקומית.
ב. הוכיחו שמכפלה טופולוגית $X\times Y$ קשירה אם ורק אם X,Y קשירים.

<u>פתרון</u> א:

הסברים על זה כל כדור סגור $B_r[u]$ במרחב הזה לא קומפקטי ראו בתשובות של שיעורי בית מספר 12 (שאלה 7 עם שינוי מינורי $[0,1]$ במקום $[0,2]$)

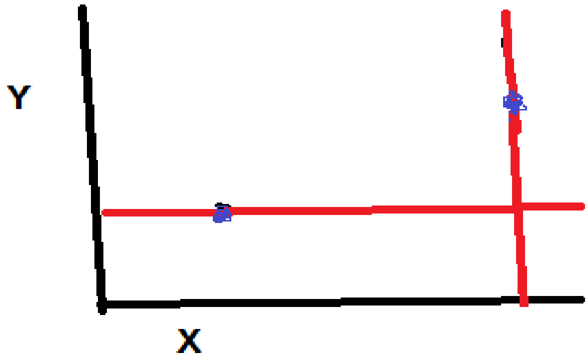
http://www.math-wiki.com/images/6/6c/MegTopTirNotes13Part32020.pdf

כל סביבה V של נקודה v במרחב זה מכילה כדור סגור מסוים $B_\varepsilon[v]$. לכן V לא יכול להיות קומפקטי כי מכילה תת קבוצה סגורה $B_\varepsilon[v]$ לא קומפקטית.

<u>פתרון</u> ב:

נניח מכפלה טופולוגית $X\times Y$ קשירה. הטלות $p_1:X\times Y\to X,\quad p_2:X\times Y\to Y$ רציפות ועל. לפי המשפט שלמדנו קשירותת נשמרת ע"י תמונה רציפה לכן X,Y קשירים גם קשירים.

נניח X,Y קשירים. צ"ל מכפלה טופולוגית $X\times Y$ קשירה. ש"ל שיש מרכיב קשירות אחת.
ש"ל שלכל שני איברים $u_1=(x_1,y_1),u_2=(x_2,y_2)$ ב $X\times Y$ יש תת קבוצה קשירה A כך ש $u_1,u_2\in A$. נבחר ב $A:=X\times\{y_1\}\cup\{x_2\}\times Y$. כמובן $u_1=(x_1,y_1),u_2=(x_2,y_2)\in A$.



$\{x_2\}\times Y \simeq Y$ $X\times\{y_1\}\simeq X$ קשירים והחיתוך $X\times\{y_1\}\cap\{x_2\}\times Y=\{(x_2,y_1)\}$ לא ריק.
לכן לפי משפט השירשור הקבוצה $A:=X\times\{y_1\}\cup\{x_2\}\times Y$ קשירה.

<u>**שאלת הבונוס**</u>:
הוכיחו או הפריכו: קיימת קומפקטיפיקציה $f:(-4,2020)\to Y$ כך ש Y לא קשיר מסילתית.
תזכורת: פונקציה $f:\mathrm{X}\to Y$ נקראת *קומפקטיפיקציה* אם $f:\mathrm{X}\to Y$ שיכון טופולוגי, Y קומפקטי האוסדורפי ו $cl(f(\mathrm{X}))=Y$.
<u>**פתרון**</u>: קודם כל נוכיח ששקול לפתור את השאלה עבור אינטרוול פתוח $(0,1)$ במקום $(-4,2020)$.
איטרוולים הנ"ל הומיאומורפיים (כל הכדורים הפתוחים באותו מרחב נורמי כולם הומיאומורפיים).
קיים הומיאומורפיזם $\mathrm{h}:(-4,2020)\to(0,1)$. אז $f:(0,1)\to Y$ קומפקטיפיקציה אם ורק אם $f\circ h:(-4,2020)\to Y$ קומפקטיפיקציה.
נוכיח שקיימת קומפקטיפיקציה $f:(0,1)\to Y$.
בשלב הראשון נגדיר פונקציה $g(x)=\sin\frac{1}{x}$ $\mathrm{g}:(0,1)\to\mathbb{R}$. היא מוגדר היטב כי $x\neq 0$ ורציפה.
גרף שלו $Gr(\mathrm{g}):=\{(\mathrm{x},\mathrm{f}(\mathrm{x}))\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\{0,1)\}$ הומיאומורפי ל $(0,1)$.
נסמן ב Y את הסגור של הגרף במישור. אז Y האוסדורפי וקומפקטי
(כתת קבוצה חסומה וסגורה במרחב אוקלידי).
בהרצאות למדנו ש Y לא קשיר מסילתית (יש לו 2 מרכיבי קשירות-מסילתיים).
כעת נגדיר את הפונקציה $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ $f:(0,1)\to Y$.
היא קומפקטיפיקציה ו Y לא קשיר מסילתית.