

## חשבון אינפיניטסימלי 1 - תרגיל 4

19 בנובמבר 2019

### שאלה 1

מצאו את הגבולות הבאים. הוכיחו את תשובתכם.

א.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3}{(n^2+1)(3n+1)} + \frac{3^n+2^n}{3^n-2^n} \right)$

ב.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{7}{n+3} \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+3}-n} \right)$

ג.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a + aq + aq^2 + \dots + aq^n)$  כאשר  $a \in \mathbb{R}$  ו- $|q| < 1$ .

ד.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{7+\cos(2n)}{2-\sin(n)} + \frac{5-2n \sin(n)}{n} \right)$  **הדרכה:** היעזרו בזהות טריגונומטרית.

### שאלה 2

יהיו  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  שתי סדרות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם  $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$  לא מתכנסת וגם  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  מתכנסת אז  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  לא מתכנסת.

ב. אם  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  לא מתכנסת ו- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  לא מתכנסת אז גם  $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$  לא מתכנסת.

ג. אם  $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$  לא מתכנסת וגם  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  מתכנסת אז  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  לא מתכנסת.

### שאלה 3

א. הוכיחו ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_2(\log_2 n) = \infty$  לפי הגדרת התכנסות לאינסוף.

ב. רשמו את ההגדרה של התכנסות למינוס אינסוף. הוכיחו ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  אם ורק אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\infty$ .

### שאלה 4

הוכיחו, באמצעות שימוש בכלל הסנדוויץ' במובן הרחב:

א.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \infty$

ב.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = \infty$

**תזכורת:**

- כלל הסנדוויץ' במונח הרחב קובע שעבור שתי סדרות  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  ו-  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  כך ש-  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  אם  $n \in \mathbb{N}$ , לכל  $a_n \leq b_n$  אז גם  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ .
- $n!$  (קרי: " $n$  עצרת") מוגדר עבור  $n \in \mathbb{N}$  בתור מכפלת כל הטבעיים שקטנים או שווים ל- $n$ :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

$$\text{למשל, } 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$