בוחן אמצע – אינפי 2 (מועד ב')

בוחן הנערך בתאריך 06.07.2010 .

מתרגלים : ארז שיינר , תומר יניב

הזמן המוקצב לבוחן : שעה וחצי.

אסור שימוש בחומר עזר מסוג שהוא – נוסחאות רלוונטיות מופיעות בסוף הבוחן .

ענו על שאלה 1 (30 נקודות)

1. הוכח את אי השיוויון הבא עבור $x>0$: $\frac{x}{x+1}<\ln(1+x)<\frac{x(x+2)}{2(x+1)}$

הוכחה:

עבור החלק השמאלי נפעיל את משפט לגרנז' על הפונקציה $f=\ln(1+x)$ בקטע $[0,x]$

לקבל $f'(c)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ עבור $c\in(0,x)$ במקרה שלנו $\frac{1}{1+c}=\frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x-0}$ ולכן

$\ln(1+x)=\frac{x}{1+c}<\frac{x}{1+x}$ (מכיוון ש $0<c<x$).

עבור החלק הימני נוכיח באמצעות חקירת פונקציות ש $g=\ln(1+x)-\frac{x(x+2)}{2(x+1)}$ הינה

פונקציה שלילית עבור $x>0$.

$$g'=\frac{1}{1+x}-\frac{2(2x+2)(x+1)-2x(x+2)}{4(x+1)^2}=\frac{4(x+1)-2(2x+2)(x+1)+2x(x+2)}{4(x+1)^2}=$$

$$=\frac{(x+1)[4-2(2x+2)]+2x(x+2)}{4(x+1)^2}=\frac{(x+1)(-4x)+2x(x+2)}{4(x+1)^2}=\frac{x[(x+1)(-4)+2(x+2)]}{4(x+1)^2}=$$

$$=\frac{-2x^2}{4(x+1)^2}<0$$ (עבור $x>0$)

לכן זו פוקציה יורדת ממש, המתחילה ב $g(0)=0$ ולכן $g<0$ עבור $x>0$ כפי שרצינו.

ענו על שאלה 2 (20 נק')

2. פתרו **שניים** מבין שלושת הסעיפים :

א. $\int x^2\ln(x^2+1)dx$

פתרון:

$$\int x^2\ln(x^2+1)dx=\frac{1}{3}x^3\ln(x^2+1)-\frac{2}{3}\int\frac{x^4}{x^2+1}dx=\frac{1}{3}x^3\ln(x^2+1)-\frac{2}{3}\int\frac{x^4-1+1}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}x^3\ln(x^2+1)-\frac{2}{3}\left[\int\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1}dx+\arctan x\right]=\frac{1}{3}x^3\ln(x^2+1)-\frac{2}{3}\arctan x-\frac{2}{9}x^3+\frac{2}{3}x+C$$

ב. $\int\cos^3(x)dx$

פתרון:

$$\int\cos^3 x dx=\begin{Bmatrix} t=\sin x \\ dt=\cos x dx \\ \cos^2 x=1-t^2\end{Bmatrix}=\int(1-t^2)dt=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$$

ג. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x+\sin^3 x}dx$ רמז: הציבו $x=\frac{\pi}{2}-t$

פתרון:

נציב לקבל

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x+\sin^3 x}dx=\left\{x=\frac{\pi}{2}-t\right\}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos^3 t}{\sin^3 t+\cos^3 t}(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 t}{\sin^3 t+\cos^3 t}dt$$

לכן $2I=I+I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x+\sin^3 x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 t}{\sin^3 t+\cos^3 t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\cos^3 x+\sin^3 x}dx=\frac{\pi}{2}$

ולכן $I=\frac{\pi}{4}$

ענו על שאלה 3 (11 נק')

3. תהי $A\in[0,1]$ כך ש A אינסופית מעוצמה $\aleph_0$. ותהיי $f(x)=\begin{cases}0 & x\notin A\\ 1 & x\in A\end{cases}$. הוכח ש f אינה אינטגרבילית בקטע, או הבא דוגמא נגדית והוכח שהיא כן אינטגרבילית בקטע.

פתרון:

ניתן דוגמא נגדית $A=\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$. הוכחה אחת בפתרון תרגיל 6 שאלה 1.ג'.

דרך אחרת להוכיח להוכיח: קל להראות שקבוצת נקודות אי הרציפות של הפונקציה היא A עצמה, אבל היא ממידה אפס ולכן לפי משפט לבג היא אינטגרבילית.

ענו על שאלות 4-6 (13 נק' לשאלה) :

4. ידוע כי $\sin(\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{\pi}{4})$. חשב את הפונקציה $f(x)=\arctan x+\arctan\frac{1-x}{1+x}$ בכל נקודה פרט ל $x=-1$

פתרון:

ראה פתרון תרגיל 3 שאלה 3.

5. הוכח/הפרך: f אינטגרבילית אם"ם $|f|$ אינטגרבילית

הפרכה:

ניקח את פונקצית דיריכלי שאינה אינטגרבילית. בערך מוחלט היא הפונקציה הקבועה אחד שבוודאי אינטגרבילית (קבועה היא רציפה ולכן אינטגרבילית).

6. תהי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ המקיימת $0\le f(x)$ לכל $x\in[a,b]$ וכן $\int_a^b f(x)dx=0$

ענו על **אחד** מבין שני הסעיפים הבאים:

א. הוכח /הפרך : $\int_a^b (f(x))^2\,dx=0$

הוכחה:

f אינטגרבילית בקטע ולכן חסומה בו נניח על ידי $|f|<M$. לכן

$$0\le\int_a^b (f(x))^2\,dx\le M\int_a^b f(x)dx=0$$

ב. נניח בנוסף ש f רציפה. הוכח / הפרך : $f\equiv 0$ (כלומר f זהותית אפס בקטע).

הוכחה:

ראה פתרון תרגיל 6 שאלה 2