אלגברה ליניארית 2 (88113) – פתרון בחינה (מועד א')

פרופ' רון עדין

הפתרונות כאן מנוסחים בקיצור נמרץ.

בהצלחה!

.1

א. הגדירו: גרעין ותמונה (של העתקה ליניארית).

עבור $T:V\to W$, גרעין: $\ker T:=\{v\in V \mid T(v)=\vec{0}\}$, תמונה: $\operatorname{im}T:=\{T(v)\mid v\in V\}$.

ב. יהי $T_1:V\to V$ אופרטור ליניארי המקיים $T_1^2=T_1$. נגדיר: $T_2:=I_V-T_1$. הוכיחו: $T_2^2=T_2$.

$$T_2^2=(I_V-T_1)^2=I_V-2T_1+T_1^2=I_V-2T_1+T_1=I_V-T_1=T_2$$

ג. בסימוני הסעיף הקודם הוכיחו: $V=\operatorname{im}T_1\oplus\operatorname{im}T_2$.

לכל $v\in V$: $v=I_V(v)=T_1(v)+T_2(v)\in\operatorname{im}T_1+\operatorname{im}T_2$, ולכן $V=\operatorname{im}T_1+\operatorname{im}T_2$. נראה שהסכום הוא ישר. אם $v\in\operatorname{im}T_1\cap\operatorname{im}T_2$ אז $v=T_1(v_1)=T_2(v_2)$ עבור $v_1,v_2\in V$ ולכן $v=T_1(v_1)=T_1^2(v_1)=T_1T_2(v_2)=T_1(I_V-T_1)(v_2)=(T_1-T_1^2)(v_2)=(T_1-T_1)(v_2)=\vec{0}$.

.2

א. הגדירו: פולינום אופייני, פולינום מינימלי (של מטריצה).

עבור מטריצה A, פ"א: $f_A(x):=\det(xI-A)$; פ"מ: הפולינום המתוקן $m_A(x)$ מהמעלה החיובית הקטנה ביותר כך ש- $m_A(A)=0$.

ב. תהי

$$A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&b&0\\0&0&2&c\\0&0&0&2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times 4}$$

כאשר $a,b,c\in\mathbb{R}$. מצאו את הפולינום המינימלי של A; חלקו למקרים לפי הצורך.

המטריצה A משולשית עליונה, ולכן פ"א: $f_A(x):=(x-1)^2(x-2)^2$. יש 4 אפשרויות עבור פ"מ: $m_A(x)\in\{(x-1)(x-2),\,(x-1)^2(x-2),\,(x-1)(x-2)^2,\,(x-1)^2(x-2)^2\}$.

חישוב ישיר נותן:

$$(A-I)(A-2I)=\begin{pmatrix}0&-a&ab&0\\0&0&0&bc\\0&0&0&c\\0&0&0&0\end{pmatrix}=0\quad\Leftrightarrow\quad a=c=0$$

$$(A-I)^2(A-2I)=\begin{pmatrix}0&0&0&abc\\0&0&0&bc\\0&0&0&c\\0&0&0&0\end{pmatrix}=0\quad\Leftrightarrow\quad c=0$$

$$(A-I)(A-2I)^2=\begin{pmatrix}0&a&-ab&abc\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad a=0$$

ולכן הפ"מ הוא $(x-1)(x-2)$ עבור $a=c=0$, $(x-1)^2(x-2)$ עבור $a\neq 0, c=0$,
$(x-1)(x-2)^2$ עבור $a=0, c\neq 0$, $(x-1)^2(x-2)^2$ עבור $a,c\neq 0$.

.3 תהי $A\in\mathbb{R}^{4\times 4}$ מטריצה עם פולינום מינימלי $m_A(x)=x^3-2x^2$.

א. מצאו את הערכים העצמיים של A, כולל ריבוי; רשמו את כל האפשרויות.
$\lambda=0$ בריבוי (אלגברי) 3, $\lambda=2$ בריבוי 1; או $\lambda=0$ בריבוי 2, $\lambda=2$ בריבוי 2.

ב. מהי צורת ז'ורדן של A? רשמו את כל האפשרויות.
$J_2(0)\oplus J_1(0)\oplus J_1(2)$ או $J_2(0)\oplus J_1(2)\oplus J_1(2)$.

ג. הוכיחו: המטריצה A אינה סימטרית.
מטריצה ממשית סימטרית ניתנת ללכסון (אורתוגונלי), ולכן צורת ז'ורדן שלה אלכסונית. זה לא מתקיים עבור אף אחת מהאפשרויות בסעיף ב'. נימוק חילופי: המטריצה לא ניתנת ללכסון כי הפ"מ הנתון אינו מתפרק לגורמים ליניאריים שונים.

.4

א. הגדירו: אורך (נורמה) של וקטור, זווית בין וקטורים (ציינו מתי מושגים אלו מוגדרים).
אורך (נורמה): $\|v\|:=\sqrt{\langle v,v\rangle}$ במרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$.

זווית $0\le\theta\le\pi$ מוגדרת ע"י $\cos\theta:=\dfrac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\|w\|}$ כאשר $v,w\neq\vec{0}$ במרחב מ"פ מעל $\mathbb{R}$.

ב. הוכיחו שבכל מרחב מכפלה פנימית V (מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$) מתקיימת הזהות

$$\|v+w\|^2+\|v-w\|^2=2\left(\|v\|^2+\|w\|^2\right)$$

והסבירו מדוע זהות זו נקראת גם "זהות המקבילית".

$$\langle v+w,v+w\rangle+\langle v-w,v-w\rangle=$$
$$\langle v,v\rangle+\langle v,w\rangle+\langle w,v\rangle+\langle w,w\rangle+\langle v,v\rangle-\langle v,w\rangle-\langle w,v\rangle+\langle w,w\rangle=2\langle v,v\rangle+2\langle w,w\rangle$$

במקבילית שצלעותיה v,w האלכסונים הם $v+w, v-w$. סכום ריבועי אורכי שני האלכסונים שווה לסכום ריבועי אורכי ארבע הצלעות.

ג. נגדיר ב-$\mathbb{R}^2$:

$$\|(x,y)\|:=|x|+|y| \qquad (\forall x,y\in\mathbb{R})$$

הוכיחו: $\|\cdot\|$ אינה מתקבלת ממכפלה פנימית כלשהי על $\mathbb{R}^2$.

אם ניקח $v=(1,0)$, $w=(0,1)$ נקבל עבור נורמה זו $\|v+w\|^2+\|v-w\|^2=2^2+2^2=8$
אבל $2\left(\|v\|^2+\|w\|^2\right)=2\left(1^2+1^2\right)=4$, ולכן זהות המקבילית לא מתקיימת.

.5

א. הגדירו: אופרטור אוניטרי, אופרטור הרמיטי.
<u>אופרטור אוניטרי:</u> $T^*=T^{-1}$; <u>אופרטור הרמיטי:</u> $T^*=T$ (עבור אופרטור ליניארי $T:V\to V$ על ממ"פ V).

ב. הוכיחו: אם S,T אופרטורים אוניטריים אז גם ST אופרטור אוניטרי.
$$(ST)^*=T^*S^*=T^{-1}S^{-1}=(ST)^{-1}$$

ג. הוכיחו: אם S,T אופרטורים הרמיטיים אז: ST הרמיטי $\Leftrightarrow$ $ST=TS$.
$$(ST)^*=ST\Leftrightarrow T^*S^*=ST\Leftrightarrow TS=ST$$