

אנליזה מודרנית תש"ף - תרגיל 3

להגשה עד 27.11.19

שאלה 1

תהינה \mathcal{A}_1 ו- \mathcal{A}_2 שתי משפחות של תת-קבוצות ב- X . הראו כי אם $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_1)$ אז $\sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma(\mathcal{A}_2)$.

שאלה 2

יהי X מרחב מטרי עם σ -אלגברת בורל $\mathcal{B}(X)$, ותהי μ מידה על X . נגדיר את התומך של μ להיות הקבוצה הקטנה ביותר F כך שהאיברים ב- F^c הם קבוצות סגורות, וכן $\mu(F^c) = 0$.

תהי $F \in [0, 1]$ קבוצה סגורה. הראו כי קיימת מידה על $[0, 1]$ כך שהתומך שלה הוא F .

שאלה 3

תהינה E_1, E_2 קבוצות מדידות, ו- μ מידה חיובית. הוכיחו כי אם $\mu(E_1 \triangle E_2) = 0$ אז $\mu(E_1) = \mu(E_2)$.

שאלה 4

יהי (X, S) מרחב מדיד. תהינה μ_1, μ_2, \dots סדרת מידות חיוביות על X , כך שלכל $A \in S$ הסדרה $\mu_n(A)$ היא מונוטונית עולה. הוכיחו או הפריכו כי הפונקציה $\mu: S \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת לפי $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A)$ היא מידה חיובית.

שאלה 5

הוכיחו כי העוצמה של כל σ -אלגברה היא סופית או שאינה בת-מניה.