פתרון תרגיל בית 2 בחשבון אינפיניטסימלי 2
89-133 סמסטר ב' תשע"ה

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול.
תאריך הגשת התרגיל הוא עד התרגול בשבוע המתחיל בתאריך כ"ג ניסן ה'תשע"ה, 12.4.2015.

שאלה 1. תהא $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$. הראנו כי גם $|f(x)|$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$. הוכיחו כי גם מתקיים

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

פתרון. נשתמש במשפט מן ההרצאה שלפיו אם f ו-g פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ ולכל $x \in [a,b]$ מתקיים $f(x) \geq g(x)$, אז $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$. מתקיים כי $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ לכל $x \in [a,b]$. לכן

$$-\int_a^b |f(x)|\, dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

ומכאן נקבל את הדרוש:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

שאלה 2. תהא $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית בכל קטע סופי, ומחזורית עם מחזור $T > 0$ (כלומר $f(x+T) = f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$). הוכיחו שהאינטגרל $I(a) = \int_a^{a+T} f(x)dx$ אינו תלוי ב-a.

פתרון. נוכל לבצע החלפת משתנים פשוטה (הזזה ב-T) ושימוש בנתון כי f מחזורית עם מחזור T כדי לקבל שלכל מספר שלם $n \in \mathbb{Z}$ מתקיים

$$I(0) = \int_0^T f(x)dx = \int_T^{2T} f(x)dx = \cdots = \int_{nT}^{(n+1)T} f(x)dx$$

וכי לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\int_{nT}^{a} f(x)dx = \int_{(n+1)T}^{a+T} f(x)dx$$

כעת, יהי $a \in \mathbb{R}$ ויהי $n \in \mathbb{Z}$ המספר השלם היחיד עבורו מתקיים $nT \leq a < (n+1)T$.
לפי שני השיוויונות הנ"ל נקבל

$$\begin{aligned} I(a) = \int_a^{a+T} f(x)dx &= \int_a^{(n+1)T} f(x)dx + \int_{(n+1)T}^{a+T} f(x)dx \\ &= \int_a^{(n+1)T} f(x)dx + \int_{nT}^{a} f(x)dx = \int_{nT}^{(n+1)T} f(x)dx = I(0) \end{aligned}$$

ולכן $I(a)$ אינו תלוי ב-a, ושווה ל-$I(0)$.
נעיר כי העובדה ש-$f(x)$ אינטגרבילית, לא בהכרח אומר שקיימת לה פונקציה קדומה.

שאלה 3. חשבו את האינטגרלים הלא מסויימים הבאים:

1. $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} dx$
2. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$
3. $\int (5x-2)^7 dx$
4. $\int \frac{a}{\sqrt{b-cx^2}} dx$ עבור $a,b,c > 0$ קבועים.
5. $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx$ (רמז: שיטת ההצבה.)
6. $\int \frac{e^x}{e^x+\sqrt{e^x}} dx$ (רמז: שיטת ההצבה.)
7. $\int \frac{2\left(x^3-x\right)}{\sqrt{x^2+1}} dx$ (רמז: שיטת ההצבה.) הערה: הפונקציה המקורית שונתה.
8. $\int x^6\sqrt{2x+3} dx$ (רמז: שיטת ההצבה.)
9. $\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$ (רמז: שיטת ההצבה, או שימוש בזהות טריגונומטרית ידועה.)
10. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[5]{\sin^2 x}} dx$ (רמז: שיטת ההצבה.)
11. $\int x \ln^2 x dx$ (רמז: אינטגרציה בחלקים.)
12. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ (רמז: אינטגרציה בחלקים.)
13. $\int \sin(\ln x) dx$ (רמז: אינטגרציה בחלקים.)
14. $\int e^{2x} \sin^2 x dx$ (רמז: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$.)

פתרון. שימו לב כי בתרגילים תתכן יותר מדרך פתרון "נכונה" אחת.

.1

$$\begin{aligned} \int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x}} dx &= \int \left(x^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx \\ &= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{x} + c \end{aligned}$$

.2

$$\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2dx=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right)dx=-\frac{1}{x}-2\lg x+x+c$$

.3

$$\int(5x-2)^7\,dx=[t=5x-2,dt=5dx]=\int t^7\frac{dt}{5}$$
$$=\frac{t^8}{8}\cdot\frac{1}{5}+c=\frac{(5x-2)^8}{40}+c$$

.4

$$\int\frac{a}{\sqrt{b-cx^2}}dx=\frac{a}{\sqrt{b}}\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{c}{b}}x\right)^2}}dx=\left[t=\sqrt{\frac{c}{b}}x,dt=\sqrt{\frac{c}{b}}dx\right]$$
$$=\frac{a}{\sqrt{c}}\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{a}{\sqrt{c}}\arcsin(t)+C=\frac{a}{\sqrt{c}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{c}{b}}x\right)+C$$

כאן C הוא קבוע, ללא קשר ל-c.

.5

$$\int\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx=[t=e^x,dt=e^xdx]=\int\frac{1}{t^2+1}dt$$
$$=\arctan(t)+c=\arctan(e^x)+c$$

.6

$$\int\frac{e^x}{e^x+\sqrt{e^x}}dx=\left[t=\sqrt{e^x},dt=\frac{1}{2}\sqrt{e^x}dx\right]=\int\frac{2t}{t^2+t}dt$$
$$=2\int\frac{1}{t+1}dt=2\lg|t+1|+c=2\lg\left|\sqrt{e^x}+1\right|+c$$

.7 הערה: הפונקציה המקורית שונתה.

$$\int\frac{2\left(x^3-x\right)}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int\frac{2x\left(x-1\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}dx=\left[t=x^2+1,dt=2xdx,x=\sqrt{t-1}\right]$$
$$=\int\frac{\left(\sqrt{t-1}-1\right)^2}{\sqrt{t}}dt=\int\frac{t-1-2\sqrt{t-1}+1}{\sqrt{t}}dt$$
$$=\int\sqrt{t}dt-2\int\sqrt{\frac{t-1}{t}}dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-2A+c$$

ולחישוב האינטגרל A:

$$A=\int\sqrt{\frac{t-1}{t}}dt=\left[s=\frac{t-1}{t},ds=\frac{dt}{t^2},t=\frac{1}{1-s}\right]=\int\frac{\sqrt{s}}{(1-s)^2}ds$$
$$=\left[u=\sqrt{s},du=\frac{ds}{2\sqrt{s}}\right]=\int\frac{u^2}{(1-u^2)^2}du=\int\frac{u^2}{(1-u)^2(1+u)^2}du=$$
$$=\frac{1}{4}\int\left(-\frac{1}{1-u}+\frac{1}{(1-u)^2}-\frac{1}{1+u}+\frac{1}{(1+u)^2}\right)du$$
$$=\frac{1}{4}\left(\lg|1-u|-\frac{1}{1-u}-\lg|1+u|-\frac{1}{1+u}\right)+c=\frac{1}{4}\left(\lg\left|\frac{1-u}{1+u}\right|-\frac{2}{1-u^2}\right)+c$$

ונשאר להציב את u, s ו-t בחזרה.

.8

$$\int x^6\sqrt{2x+3}dx=\left[t=\sqrt{2x+3},dt=\frac{dx}{\sqrt{2x+3}}\Rightarrow x=\frac{t^2-3}{2}\right]=\int\left(\frac{t^2-3}{2}\right)^6t^2dt$$
$$=\frac{1}{64}\int\left(t^{12}-18t^{10}+135t^8-540t^6+1215t^4-1458t^2+729\right)t^2dt$$
$$=\frac{1}{64}\left(\frac{t^{15}}{15}-\frac{18t^{13}}{13}+\frac{135t^{11}}{11}-60t^9+\frac{1215t^7}{7}-\frac{1458t^5}{5}+243t^3\right)+c$$

ונשאר להציב את t בחזרה.

.9

$$\int\frac{1}{\cos^2x\sin^2x}dx=\left[1=\sin^2x+\cos^2x\right]=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{\sin^2x}\right)dx$$
$$=\tan x-\cot x+c$$

.10

$$\int\frac{\cos x}{\sqrt[5]{\sin^2x}}dx=[t=\sin x,dt=\cos x dx]=\int\frac{1}{\sqrt[5]{t^2}}dt$$
$$=\frac{5}{3}t^{\frac{3}{5}}+c=\frac{5}{3}\sin^{\frac{3}{5}}x+c$$

.11 נסמן $I=\int x\ln^2xdx$ ונחשב

$$I=\left[u'=x,v=\ln^2x,u=\frac{x^2}{2},v'=\frac{2\ln x}{x}\right]=\frac{x^2}{2}\ln^2x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{2\ln x}{x}dx$$
$$=\frac{x^2}{2}\ln^2x-\int x\ln xdx=\left[g'=x,f=\ln x,g=\frac{x^2}{2},f'=\frac{1}{x}\right]$$
$$=\frac{x^2}{2}\ln^2x-\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx\right)=\frac{x^2}{2}\ln^2x-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}+c$$

.12

$$\int \frac{\ln x}{x^2}dx = \left[u' = \frac{1}{x^2}, v = \ln x, u = -\frac{1}{x}, v' = \frac{1}{x}\right] = -\frac{1}{x}\ln x - \int -\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx$$
$$= -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c$$

.13 נסמן $I = \int \sin(\ln x)\,dx$ ונחשב

$$I = \left[u' = 1, v = \sin(\ln x), u = x, v' = \frac{\cos(\ln x)}{x}\right] = x\sin(\ln x) - \int x\cdot\frac{\cos(\ln x)}{x}dx$$
$$= \left[u' = 1, v = \cos(\ln x), u = x, v' = -\frac{\sin(\ln x)}{x}\right]$$
$$= x\sin(\ln x) - \left(x\cos(\ln x) - \int -x\cdot\frac{\sin(\ln x)}{x}dx\right) = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - I$$

לכן $2I = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)$ ונקבל כי

$$I = \frac{x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)}{2}$$

.14

$$\int e^{2x}\sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}}{2} - A\right)$$

ונמשיך לחשב רק את A. נזכר שבכיתה ראינו בעזרת אינטגרציה בחלקים כי

$$\int e^x\cos x dx = \frac{e^x(\sin(x)+\cos(x))}{2}$$

ולכן

$$A = \int e^{2x}\cos 2x dx = [t = 2x, dt = 2dx] = \int e^t\cos t\frac{dt}{2}$$
$$= \frac{e^t(\sin(t)+\cos(t))}{4} + c = \frac{e^{2x}(\sin(2x)+\cos(2x))}{4} + c$$

שאלה 4. הוכיחו כי לכל $0 \le k \le n$ שלמים מתקיים

$$\binom{n}{k}^{-1} = (n+1)\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,dx$$

כאשר $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. רמז: אינטגרציה בחלקים ואינדוקציה.

פתרון. נסמן את אגף ימין ב-$I_{n,k}$. ערכי הבסיס הם שלכל n מתקיים

$$I_{n,n} = (n+1)\int_0^1 x^n dx = \frac{n+1}{n+1}x^{n+1}\Big|_0^1 = 1$$

כהערה, נשים לב שבעזרת הצבה אפשר להראות כי $I_{n,k}=I_{n,n-k}$ וכך נוכל להשתמש ב-$I_{n,0}$ כערכי בסיס.
כעת נשתמש באינטגרציה בחלקים

$$\begin{aligned}
I_{n,k} &= \left[u'=x^{k}, v=(1-x)^{n-k}, u=\frac{x^{k+1}}{k+1}, v'=-(n-k)(1-x)^{n-k-1}\right] \\
&= (n+1)\left.\frac{x^{k+1}(1-x)^{n-k}}{k+1}\right|_{0}^{1} - (n+1)\int -\frac{x^{k+1}}{k+1}(n-k)(1-x)^{n-k-1}\,dx \\
&= (0-0)+\frac{n-k}{k+1}I_{n,k+1}
\end{aligned}$$

לקבלת נוסחת נסיגה, שבה מביעים את $I_{n,k}$ בעזרת ערך "קטן יותר" (קרוב יותר לערך הבסיס). כדי להביע את $I_{n,k}$ בעזרת ערך הבסיס נחשב:

$$\begin{aligned}
I_{n,k} &= \frac{n-k}{k+1}I_{n,k+1} = \frac{(n-k)(n-(k+1))}{(k+1)(k+2)}I_{n,k+2} = \dots \\
&= I_{n,n}\prod_{i=1}^{n-k}\frac{n-k+1-i}{k+i} = \frac{(n-k)!k!}{n!}I_{n,n} = \binom{n}{k}^{-1}
\end{aligned}$$

וקיבלנו את הדרוש.

בהצלחה!