מערך תרגול 10 מופשטת 3

תזכורת 10.1 נניח ש E/F הרחבת גלואה. ו $F \subseteq K \subseteq E$ שדה בניים. כך שההרחבה K/F היא גם גלואה. אז העתקת הצמצום

$$|_K \colon \mathrm{Gal}(E/F) \to \mathrm{Gal}(K/F)$$

היא הומומורפיזם של חבורות (החידוש הוא שהיא מוגדרת היטב' זה שהיא הומומורפיזם זה ברור)

תרגיל 10.2 יהיו L, K שני שדות כך ש $K/L \cap K$ היא הרחבת גלואה. הוכיחו כי $K \vee L/L$ היא הרחבת גלואה ו

$$\mathrm{Gal}(K \vee L/L) \cong \mathrm{Gal}(K/K \cap L)$$

פתרון: ראשית נוכיח ש $K \vee L/L$ גלואה. היות ש $K/K \cap L$ גלואה, יש פולינום $f(x) \in (K \cap L)[x]$ ספרבילי כך ש K הוא השדה פיצול שלו. כלומר $K = (K \cap L)(a_1, \ldots, a_n)$ כאשר $a_1, \ldots, a_n$ הם שורשי הפולינום. עכשיו $f(x)$ הוא גם פולינום מעל L. שדה הפיצול שלו (מעל L) הוא כמובן $L(a_1, \ldots, a_n)$. כמובן ש $L \subseteq K \vee L$ ובנוסף כל $a_i \in K \subseteq K \vee L$ ולכן $L(a_1, \ldots, a_n) \subseteq K \vee L$. מצד שני $L \subseteq L(a_1, \ldots, a_n)$ וגם

$$K = (K \cap L)(a_1, \ldots, a_n) \subseteq L(a_1, \ldots, a_n)$$

ולכן

$$K \vee L = L(a_1, \ldots, a_n)$$

זה מוכיח ש $K \vee L$ שדה פיצול של פולינום ספרבילי מעל L ולכן זו הרחבת גלואה כנדרש. עכשיו צריך למצוא את האיזומורפיזם. ראשית נשים לב ש

$$\mathrm{Gal}(K \vee L/L) \subseteq \mathrm{Gal}(K \vee L/K \cap L)$$

ולכן יש העתקת הכלה

$$i : \mathrm{Gal}(K \vee L/L) \to \mathrm{Gal}(K \vee L/K \cap L)$$

כעת לפי מה שכתבנו בתזכורת יש העתקת צמצום

$$r : \mathrm{Gal}(K \vee L/K \cap L) \to \mathrm{Gal}(K/K \cap L)$$

האיזומורפיזם הרצוי הוא הרכבה של שני אלה ri. היות שזו הרכבה של הומומורפיזמים של שדות ברור שזה עדיין הומומורפיזם. צריך להוכיח שהוא חד־חד־ערכי ועל. נוכיח חח"ע. נניח $\varphi \in \ker ri$כלומר

$$ri(\varphi) = 1$$

זה בעצם אומר ש $\varphi(k) = k$ לכל $k \in K$. אבל בנוסף $\varphi \in \mathrm{Gal}(K \vee L/L)$ ולכן $\varphi(l) = l$ לכל $l \in L$. כלומר φ מקבע את כל $K \vee L$ ולכן הוא אוטומורפיזם היחידה בעצמו, כנדרש.
נותר להוכיח על. נסמן

$$G = \mathrm{Gal}(K/K \cap L)$$

$$H = \mathrm{Gal}(K \vee L/L)$$

צריך להוכיח ש

$$ri(H) = G$$

אנחנו נוכיח ש

$$K^{ri(H)} = K \cap L$$

וזה מוכיח את הדרוש כי זו הרחבת גלואה.
מצד אחד ברור ש $ri(H) \subseteq G$ ולכן

$$K \cap L = K^G \subseteq K^{ri(H)}$$

כמו כן ברור ש

$$K^{ri(H)} \subseteq K$$

החלק היחיד שקשה זה להוכיח $K^{ri(H)} \subseteq L$. יהי $a \in K$ כך שלכל $\varphi \in H$ מתקיים

$$ri(\varphi)(a) = a$$

בגלל שr, i הן הכלה וצמצום בעצם מתקיים

$$\varphi(a) = a$$

ולכן $a \in (K \vee L)^H = L$ כנדרש ובזה סיימנו את ההוכחה.

תרגיל 10.3 תהי E/F הרחבת שדות עם חבורת גלואה $G = \mathrm{Gal}(E/F)$. ניקח $H \leq G$ הנוצרת על ידי $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$. הוכיחו כי

$$E^H = E^{\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}}$$

פתרון: ההכלה

$$E^H \subseteq E^{\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}}$$

טריויאלית. מצד שני ברור שאברים שמקובעים ע"י $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ מקובעים גם ע"י המכפלות שלהם ולכן

$$E^H = E^{\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}}$$

כנדרש.

תזכורת 10.4 המשפט כנראה הכי חשוב בקורס הזה: תהי E/F הרחבת גלואה. יש אנטי איזומורפיזם של סריגים בין סריג תת החבורות של $\mathrm{Gal}(E/F)$ לבין סריג הרחבות הביניים של E/F. בהינתן הרחבת ביניים K החבורה המתאימה היא $\mathrm{Gal}(E/K)$ ובהינתן תת חבורה $H \leq G$ התת שדה המתאים הוא E^H (מה שמיוצב ע"י אברי H). בנוסף K/F גלואה אם ורק אם $\mathrm{Gal}(E/K)$ נורמלית. ובנוסף

$$\mathrm{Gal}(E/F)/\mathrm{Gal}(E/K) \cong \mathrm{Gal}(K/F)$$

תרגיל 10.5 מצאו את כל שדות הביניים של ההרחבה $E/\mathbb{Q}$ כאשר E שדה הפיצול של x^3-2. קבעו אילו מהם מהווים הרחבה נורמלית מעל $\mathbb{Q}$.

פתרון: בתור התחלה צריך להבין את תתי החבורות של $G = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$. כבר ראינו ש $G = S_3$. כל תתי החבורות שלה הן מסדר $1, 2, 3, 6$. תתי החבורות שלה הן:

$$S_3, A_3, \langle (12) \rangle, \langle (13) \rangle, \langle (23) \rangle, \{1\}$$

כמובן ששדות ביניים שמתאימים ל S_3 ו $\{1\}$ הם $\mathbb{Q}$ וE. צריך למצוא את שדות הביניים שמתאימים לאחרים. כזכור $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\rho, \sqrt[3]{2}\rho^2$ הם שורשי הפולינום. קל לראות ש

$$E^{\langle (12) \rangle} = E^{(12)} = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\rho^2)$$

כי מצד אחד (12) מקבע אותו ולכן

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\rho^2) \subseteq E^{(12)}$$

אבל מצד שני אין עוד שדות ביניים משיקולי מימד.

בדומה

$$E^{(23)} = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), \quad E^{(13)} = \mathbb{Q}(\rho\sqrt[3]{2})$$

כעת, נותר להבין מהו E^{A_3}. זה צריך להיות שדה ממימד 2 מעל $\mathbb{Q}$. עם קצת חשיבה מוצאים את $\mathbb{Q}(\rho)$.

היות שרק A_3 נורמלית ב S_3, רק $\mathbb{Q}(\rho)$ נורמלית מעל $\mathbb{Q}$(וכמובן $E, \mathbb{Q}$ עצמם).