מבנים אלגבריים (89-214)

מרצה: ד"ר מיכאל משה שיין

תשע"ה סמסטר א'

מבחן מסכם, מועד ב'

יש לענות על ארבע שאלות ולסמן באופן ברור בתחילת המחברת באיזה שאלות בחרת. אחרת, ארבע התשובות הראשונות שמופיעות במחברת תיבדקנה. כל שאלה שווה 10 נקודות. אם ארבעה הציונים שלך הם $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq n_4$ אזי הציון הסופי יהיה $3(n_1 + n_2) + 2(n_3 + n_4)$.

כל חומר עזר אסור. משך הבחינה: שלוש שעות.

בהצלחה!

1. תהי G חבורה סופית לא טריוויאלית. נניח שאין לה תת־חבורות כלל, מלבד G עצמה והתת־חבורה הטריוויאלית $\{e\}$. הוכח כי $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ עבור p ראשוני.

2. תהי G חבורה סופית ותהי $H \subseteq G$ תת־חבורה. תהי $N_G(H)$ הקבוצה של כל האיברים $g \in G$ כך ש־ $ghg^{-1} \in H$ לכל $h \in H$.

   (א) יהי $g \in G$. הוכח כי $g \in N_G(H)$ אם ורק אם
   $$\{ghg^{-1} : h \in H\} = H$$

   (ב) הוכח כי $N_G(H)$ הינה תת־חבורה של G.

   (ג) הוכח שאם $K \subseteq G$ הינה תת־חבורה כך ש־ $K \subsetneq N_G(H)$, כלומר $N_G(H)$ מוכל ממש ב־K, אזי H הינה תת־חבורה לא־נורמלית של K.

3. לכל מספר שלם $n \in \mathbb{Z}$, הוכח כי $n^5 \equiv n \bmod 30$.

4. יהיו F_1 ו־F_2 שני שדות. העתקה $\varphi : F_1 \to F_2$ נקראת הומומורפיזם של שדות אם לכל $a, b \in F_1$ מתקיים $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ וגם $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$. יהי φ הומומורפיזם כזה.

   (א) הוכח כי $\varphi(0_{F_1}) = 0_{F_2}$.

   (ב) הוכח שאם קיים איבר $a \in F_1$ כך ש־ $\varphi(a) \neq 0_{F_2}$, אזי φ חד־חד־ערכי.

5. תהי $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$, כאשר הפעולה הינה כפל מטריצות.

   (א) הוכח כי G חבורה לא־אבלית.

   (ב) מצא את המרכז $Z(G)$.

   (ג) הוכח כי $Z(G) \simeq \mathbb{Z}$.