מתמטיקה בדידה – תרגיל 4 – פתרון

שאלה 1

תהיינה A,B קבוצות. הוכיחו כי $A\times B=B\times A$ אם ורק אם $A=B$ או $A=\phi$ או $B=\phi$.

הוכחה

כוון ראשון: נניח $A\times B=B\times A$. אם $A=\phi$ או $B=\phi$ אז גמרנו. אחרת, קיימים $a_0\in A$ ו-$b_0\in B$. יהי $x\in A$, אזי $(x,b_0)\in A\times B=B\times A$ לכן $x\in B$. יהי $x\in B$, אזי $(a_0,x)\in A\times B=B\times A$ לכן $x\in A$. הראינו ש-$x\in A$ אם"ם $x\in B$ ולכן $A=B$. כדרוש.

כוון שני: נניח $A=B$ או $A=\phi$ או $B=\phi$.

טענת עזר: אם $A=\phi$ או $B=\phi$ אז $A\times B=\phi$.

הוכחת טענת העזר: נניח בשלילה שקיים $x\in A\times B$, אזי קיימחם $a\in A$ ו-$b\in B$ כך ש-$x=(a,b)$. אבל זה אומר ש-A ו-B לא ריקות ולכן קיבלנו סתירה להנחות שלנו. מש"ל טענת עזר.

כעת, אם $A=\phi$ או $B=\phi$ אז לפי טענת העזר $A\times B=\phi$ ו-$B\times A=\phi$ ולכן $A\times B=\phi=B\times A$. אחרת, $A=B$ ואז $A\times B=A\times A=B\times A$. בכל מקרה נקבל $A\times B=B\times A$. **מש"ל.**

שאלה 2

1. לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר $A_n=\{1,2,\dots,n\}\times\{1,1+(-1)^n\}$. חשבו את $\limsup A_n$, $\liminf A_n$. הוכיחו את קביעתכם.
2. לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר את $A_n=\left\{\frac{z}{n}\middle|z\in\mathbb{Z}\right\}$. חשבו את $\limsup A_n$, $\liminf A_n$. הוכיחו את קביעתכם.
3. תנו דוגמא לקבוצות $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש-$\liminf A_n=\limsup A_n$ אבל $A_m\nsubseteq A_n$ לכל $n\neq m$.

פיתרון

סעיף 1: $\limsup A_n=\mathbb{N}\times\{0,1,2\},\quad \liminf A_n=\{(n,1)\mid n\in\mathbb{N}\}$

הוכחה: נחלק ל-4 חלקים:

א. $\liminf A_n\subseteq\{(n,1)\mid n\in\mathbb{N}\}$
ב. $\liminf A_n\supseteq\{(n,1)\mid n\in\mathbb{N}\}$
ג. $\limsup A_n\subseteq\mathbb{N}\times\{0,1,2\}$
ד. $\limsup A_n\supseteq\mathbb{N}\times\{0,1,2\}$

הוכחת א: יהי $x\in\liminf A_n$. אזי קיים $n\in\mathbb{N}$ כך שלכל $m>n$, $x\in A_m$. נבחר $m>n$ זוגי (לדוגמא $m=2n$). אזי $x\in A_m=\{1,\dots,m\}\times\{1,2\}$. לכן $x=(r,a)$ באשר $r\in\{1,\dots,m\}\subseteq\mathbb{N}$ ו-$a\in\{1,2\}$.

נבחר $n < m$ אי זוגי (לדוגמא $m = 2n + 1$). אזי $x \in A_m = \{1, \dots, m\} \times \{1,0\}$ ולכן $a \in \{1,0\}$. לפיכך, $a \in \{1,2\} \cap \{1,0\} = \{1\}$ ונובע $a = 1$. לכן, $x = (r, 1) \in \{(n, 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

הוכחת ב: יהי $x = (r, 1) \in \{(n, 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$. צריך להראות שקיים $n \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m > n$ מתקיים $x \in A_m$. באמת, נבחר $n = r$. אזי לכל $m > r$ מתקיים $r \in \{1, \dots, m\}$ ו-$1 \in \{1, 1 + (-1)^m\}$ ולכן $(r, 1) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, 1 + (-1)^m\} = A_m$.

הוכחת ג: יהי $x \in \limsup A_n$, אזי x שייך לאינסוף מהקבוצות $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. בפרט, קיים n כך ש-$x \in A_n$. אבל $A = \{1, \dots, n\} \times \{1, 1 + (-1)^n\} \subseteq \mathbb{N} \times \{0,1,2\}$ ולכן $x \in \mathbb{N} \times \{0,1,2\}$.

הוכחת ד: יהי $x = (r, a) \in \mathbb{N} \times \{0,1,2\}$. נחלק למקרים:

<u>אם $a = 1$ או $a = 0$</u> אז לכל n אי זוגי שגדול מ-r מתקיים $a \in \{0,1\} = \{1, 1 + (-1)^n\}$ ו-$r \in \{1, \dots, n\}$. לכן, $x = (r, a) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, 1 + (-1)^n\} = A_n$. יש אינסוף n-ים אי זוגיים הגדולים מ-r ולכן x שייך לאינסוף מהקבוצות $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, כלומר $x \in \limsup A_n$.

<u>אם $a = 2$</u> אז לכל n זוגי שגדול מ-r מתקיים $a \in \{2,1\} = \{1, 1 + (-1)^n\}$ ו-$r \in \{1, \dots, n\}$. לכן, $x = (r, a) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, 1 + (-1)^n\} = A_n$. יש אינסוף n-ים זוגיים הגדולים מ-r ולכן x שייך לאינסוף מהקבוצות $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, כלומר $x \in \limsup A_n$.

מש"ל.

סעיף 2: $\limsup A_n = \mathbb{Q}$ ו-$\liminf A_n = \mathbb{Z}$.

כדי שההוכחה תהיה יותר מעניינת מסעיף 1 נשתמש בטענה הבאה שהוכחנו בתרגול:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \liminf A_n \subseteq \limsup A_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

בנוסף נשתמש בעובדות הבאות (שאת ההוכחה שלהן נשאיר כתרגיל פשוט):

1. אם $A_n \subseteq X$ לכל n אז $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq X$.
2. אם $X \subseteq A_n$ לכל n אז $X \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

גם כאן נחלק את ההוכחה לארבעה חלקים:

א. $\liminf A_n \subseteq \mathbb{Z}$
ב. $\liminf A_n \supseteq \mathbb{Z}$
ג. $\limsup A_n \subseteq \mathbb{Q}$
ד. $\limsup A_n \supseteq \mathbb{Q}$

הוכחת **ג**: לכל A_n מתקיים $A_n \subseteq \mathbb{Q}$. לכן, $\limsup A_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \mathbb{Q}$.

הוכחת **ב**: לכל A_n מתקיים $\mathbb{Z} \subseteq A_n$ (כי לכל $z \in \mathbb{Z}$, $z = \frac{nz}{n} \in A_n$). לכן, $\mathbb{Z} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \liminf A_n$.

הוכחת **א**: יהי $x \in \liminf A_n$. לפי **ג**, $x \in \mathbb{Q}$ ולכן אפשר להניח $x = \frac{z}{n}$ עבור $z \in \mathbb{Z}$ ו-$n \in \mathbb{N}$. לפי הגדרת $\liminf A_n$ קיים n_0 כך שלכל $m > n_0$ מתקיים $x \in A_m$. נבחר את m להיות מספר ראשוני p הגדול מ-

$\max\{n_0,n\}$. אזי מתקיים $x\in A_p$ ולכן קיים $w\in\mathbb{Z}$ כך ש-$\frac{z}{n}=x=\frac{w}{p}$. נכפול ב-$np$ ונקבל $pz=nw$. היות ו-p ראשוני בהכרח $p|n$ או $p|w$. האפשרות הראשונה בלתי אפשרית כי $p>n$ ולכן $p|w$. אבל זה אומר ש-$x=\frac{w}{p}\in\mathbb{Z}$. כדרוש.

הוכחת **ד**: יהי $x\in\mathbb{Q}$. צריך להוכיח ש-$x\in A_n$ עבור אינסוף n-ים. נכתוב $x=\frac{z}{m}$ עבור $z\in\mathbb{Z}$ ו-$m\in\mathbb{N}$. אזי לכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $x=\frac{kz}{km}\in A_{km}$. לכן $x\in A_n$ לכל $n\in\{m,2m,3m,\dots\}$.

מש"ל.

סעיף 3: נבחר $A_n=\{n\}$. לכל $n\neq m$ מתקיים $A_n\nsubseteq A_m$ כי $n\in A_n$ אבל $n\notin A_m$. אבל, $\liminf A_n=\limsup A_n=\phi$. כדי לראות זאת, נשים לב שלפי הטענות שהזכרנו בסעיף 2, $\liminf A_n\subseteq\limsup A_n$ ולכן מספיק להראות $\limsup A_n=\phi$ (כי תת קבוצה של קבוצה ריקה היא ריקה). באמת, נניח בשלילה שיש $x\in\limsup A_n$, אזי יש אינסוף n-ים כך ש-$x\in A_n$. בפרט, יש $m\neq n$ כך ש-$x\in A_n$ ו-$x\in A_m$. אבל זה אומר ש-$m=x=n$ - סתירה!

שאלה 3

תהיינה A,B קבוצות. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

א. $A\subseteq B$
ב. $A\in P(B)$
ג. $P(A)\subseteq P(B)$

הוכחה

מספיק להוכיח:

1. א גורר את ג
2. ג גורר את ב
3. ב גורר את א

(מדוע?)

הוכחת 1: נניח $A\subseteq B$. צ"ל $P(A)\subseteq P(B)$. תהי $X\in P(A)$, אזי $X\subseteq A$. היות ו-$A\subseteq B$ נובע ש-$X\subseteq B$ ולכן $X\in P(B)$.

הוכחת 2: נניח $P(A)\subseteq P(B)$. צ"ל $A\in P(B)$. מתקיים $A\subseteq A$ ולכן $A\in P(A)$. היות ו-$P(A)\subseteq P(B)$ נובע $A\in P(B)$.

הוכחת 3: זה נובע ישירות מהגדרת קבוצת החזקה.

שאלה 4

תהיינה A,B קבוצות סופיות. נגדיר $n=|A|,m=|B|,k=|A\cap B|$. הביעו בעזרת n,m,k את גודלן של הקבוצות הבאות. נמקו את קביעתכם.

1. $A \cup B$
2. $P(A)\, \Delta\, P(B)$
3. $(A \cap B) \times (B \cup A)$
4. $(P(A) \setminus \{A\} \setminus \{\phi\}) \times B$
5. $\big(P(A) \times P(B)\big) \cup \big(P(A \cup B) \times P(A \cap B)\big)$

פיתרון

נשתמש בעובדות הבאות:

א. $|P(X)| = 2^{|X|}$
ב. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
ג. אם $X \subseteq Y$ אז $|X \setminus Y| = |X| - |Y|$
ד. $P(X) \cap P(Y) = P(X \cap Y)$ (תרגיל)
ה. $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$

פתרון 1: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = n + m - k$.

פתרון 2: $|P(A) \Delta P(B)| = \big|\big(P(A) \cup P(B)\big) \setminus \big(P(A) \cap P(B)\big)\big| = |P(A) \cup P(B)| - |P(A) \cap P(B)| = |P(A)| + |P(B)| - |P(A) \cap P(B)| - |P(A) \cap P(B)| = 2^n + 2^m - 2|P(A \cap B)| = 2^n + 2^m - 2 \cdot 2^k = 2^m + 2^n - 2^{k+1}$

פתרון 3: $|(A \cap B) \times (B \cup A)| = |A \cap B| \cdot |B \cup A| = k(n + m - k)$ (השתמשנו בסעיף 1).

פתרון 4: אם $n = 0$ אז $A = \phi$. במקרה זה $P(A) \setminus A \setminus \{\phi\} = \phi$ ולכן $(P(A) \setminus \{A\} \setminus \{\phi\}) \times B$ קבוצה ריקה ובגודל 0.

אם $n > 0$ אז $A \neq \phi$ ולכן $|P(A) \setminus \{A\} \setminus \{\phi\}| = |P(A)| - 2 = 2^n - 2$. כעת: $|(P(A) \setminus \{A\} \setminus \{\phi\}) \times B| = (2^n - 2)|B| = (2^n - 2)m = 2^n m - 2m$.

(בדקו שכאשר $n = 0$ הביטוי הנ"ל יוצא שלילי ולכן בהכרח המקרה $n = 0$ הוא מקרה מיוחד.)

פתרון 5: נשתמש כאן בעובדה נוספת: $A \times B \cap C \times D = (A \cap C) \times (B \cap D)$. כעת:

$$\big|\big(P(A) \times P(B)\big) \cup \big(P(A \cup B) \times P(A \cap B)\big)\big| = |P(A) \times P(B)| + |P(A \cup B) \times P(A \cap B)| - \big|\big(P(A) \times P(B)\big) \cap \big(P(A \cup B) \times P(A \cap B)\big)\big| = |P(A)| \cdot |P(B)| + |P(A \cup B)| \cdot |P(A \cap B)| - \big|\big(P(A) \cap P(A \cup B)\big) \times \big(P(B) \cap P(A \cap B)\big)\big| = 2^n 2^m + 2^{|A \cup B|} 2^k - |P(A) \times P(A \cap B)| = 2^{n+m} + 2^{n+m-k} 2^k - |P(A)| \cdot |P(A \cap B)| = 2^{n+m} + 2^{n+m} - 2^n 2^k = 2^{n+m+1} - 2^{n+k}$$

הערה: השתמשנו בשאלה 3 במספר מקומות – לדוגמא, $P(B) \cap P(A \cap B) = P(A \cap B)$ נובע מכך ש-$P(A \cap B) \subseteq P(B)$ וזאת משום ש-$A \cap B \subseteq B$ (לפי שאלה 3).