

תרגיל 9

23 בדצמבר 2017

שאלה 1

מצא את הנקודה על הפרבולה $y = 2x^2 + 5$ שמרחקה מראשית הצירים הוא מינימלי.

הדרכה:

מרחק של נקודה (x, y) מראשית הצירים נתון על ידי נוסחה $\sqrt{x^2 + y^2}$.
תבנו פונקציה $g(x) = \sqrt{x^2 + y^2}$, בטאו אותה באמצעות x , ומצאו את המינימום המוחלט שלה.

פתרון:

נגדיר פונקציה $g(x) = \sqrt{x^2 + (2x^2 + 5)^2} = \sqrt{4x^4 + 21x^2 + 25}$ נשים לב שהפונקציה רציפה בכל x ממשי,

נחפש נקודות קריטיות: $g'(x) = \frac{x(8x^2 + 21)}{\sqrt{4x^4 + 21x^2 + 25}}$ ולכן $g'(x) = 0$ אם $x = 0$.
נשתמש במבחן נגזרת ראשונה:

קל לראות שכאשר $x < 0$ ולכן $g'(x) < 0$ הפונקציה יורדת

כאשר $x > 0$ ולכן $g'(x) > 0$ הפונקציה עולה

כמסקנה אנו מקבלים שב- $x = 0$ יש נקודת מינימום, שהיא גם מינימום מוחלט.

נציב אותה בפונקציה ונקבל $y = 5$ ולכן נקודה $(0, 5)$ היא נקודה על הפרבולה שהכי קרובה לראשית הצירים.

שאלה 2

מצא מינימום ומקסימום מוחלט עבור הפונקציה הבאה בקטע $[-2, 2]$:

$$f(x) = 4 + |1 - x^2|$$

פתרון:

קודם כל נשים לב שהפונקציה רציפה ב- \mathbb{R} ,

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 3 + x^2 & x < -1 \text{ or } x > 1 \end{cases}$$

נחפש נקודות קריטיות:

בתחום $x < -1$ או $x > 1$ $f'(x) = 2x = 0$ אם $x = 0$ אבל הנקודה לא נמצאת

בתחום ולכן היא לא מעניינת

בתחום $-1 \leq x \leq 1$ $f'(x) = -2x = 0$ אם $x = 0$

נבדוק גזירות בנקודות $x = \pm 1$:

$x = 1$: נתבונן בביטוי $\frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{f(1+\Delta x) - 4}{\Delta x}$ כאשר $f(1) = 4$

יהי $x \approx 1 + \Delta x$, $\Delta x > 0$, אינפלי,

$$st\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = st\left(\frac{3 + (1 + \Delta x)^2 - 4}{\Delta x}\right) = 2$$

יהי $\Delta x < 0, x = 1 + \Delta x, x \approx 1$ אינפלי:
 $st\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = st\left(\frac{5-(1+\Delta x)^2-4}{\Delta x}\right) = -2$
 ולכן $x = 1$ זו נקודה שבה הנגזרת לא מוגדרת ולכן היא נקודה קריטית נוספת.
 באותו אופן קל לראות ש- $x = -1$ היא נקודת אי גזירות ולכן גם נקודה קריטית.
 שתי נקודות קריטיות נוספות הן הקצוות: $x = \pm 2$.
 נציב בפונקציה את כל הנקודות הקריטיות ונשווה בין הערכים:
 $f(2) = f(-2) = 7, f(1) = f(-1) = 4, f(0) = 5$
 ולכן מקבלים ש- $x = \pm 2$ הן נקודות מקסימום מוחלט, $x = \pm 1$ הן נקודות מינימום מוחלט.

שאלה 3

מצא נקודות קיצון מקומי ומוחלט (אם יש), תחומי עליה/ירידה, נקודות פיתול (אם יש), תחומי קמירות/קעירות של הפונקציות הבאות:

א) $f(x) = x^3 - 3x^2$

ב) $f(x) = x \cdot e^x$

ג) $f(x) = \ln(\sin(x))$ בתחום $(0, \pi)$

ד) $f(x) = \sin^2(x)$ בתחום $[0, \pi]$

פתרון:

א) פונקציה היא פולינום ולכן רציפה בכל מקום.

$f'(x) = 3x(x - 2) = 0$ כאשר $x = 0, 2$

$f''(x) = 6x - 6 = 0$ כאשר $x = 1$ ולכן זו נקודה שחשודה לפיתול

נבנה טבלה:

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f(x)$	עולה	0	יורדת	-2	יורדת	-4	עולה
$f'(x)$	+	0	-	-3	-	0	+
$f''(x)$	-	-6	-	0	+	6	+

הסימן של הנגזרת הראשונה נקבע על ידי הצבה של נקודה בקטע נתון, למשל כאשר $x < 0$ נבחר $x = -1$ (כל נקודה אחרת שלילית מתאימה)

ונקבל $f'(-1) = 9$ ולכן בתחום הזה הפונקציה עולה, $f''(-1) = -12$ ולכן בתחום

הזה הנגזרת השנייה היא שלילית ולכן הפונקציה היא קעורה

מהטבלה נסיק ש:

תחומי עלייה: $x < 0, x > 2$

תחום ירידה: $0 < x < 2$

תחום קמירות: $x > 1$

תחום קעירות: $x < 1$

נקודת פיתול: $x = 1$

נקודת מינימום מקומי: $x = 2$ (לפי מבחן נגזרת ראשונה)

נקודת מקסימום מקומי: $x = 0$ (לפי מבחן נגזרת ראשונה)

נקודות מינימום/מקסימום מוחלט: אין

ב) נשים לב שהפונקציה היא רציפה בכל מקום

$f'(x) = e^x(1+x) = 0$ אם $x = -1$, ולכן זו נקודה קריטית

$f''(x) = e^x(2+x) = 0$ אם $x = -2$ ולכן זו נקודה חשודה לפיתול

x	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < -1$	$x = -1$	$x > -1$
$f(x)$	יורדת	$-2 \cdot e^{-2}$	יורדת	$-e^{-1}$	עולה
$f'(x)$	-	$-e^{-2}$	-	0	+
$f''(x)$	-	0	+	e^{-1}	+

מהטבלה נסיק ש:

(1) תחום ירידה: $x < -1$

תחום עלייה: $x > -1$

תחום קמירות: $x > -2$

תחום קעירות: $x < -2$

נקודת מינימום: $x = -1$

נקודת מקסימום: אין

נקודת פיתול: $x = -2$

נקודת מינימום מוחלט: $x = -1$, נקודת מקסימום מוחלט: אין

(ג) רציפה בתחום שבו $\sin(x) > 0$ כלומר היא רציפה בתחום שלנו

הנגזרת מוגדרת בכל נקודה של הקטע הנתון $f'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

$f'(x) = 0$ כאשר $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, הנקודה היחידה שבה נגזרת מתאפסת אשר נמצאת

בקטע שלנו היא $x = \frac{\pi}{2}$

$f''(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} \neq 0$ לכל x , ולכן אין נקודות אשר חשודות לפיתול

x	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$x = \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$
$f(x)$	עולה	0	יורדת
$f'(x)$	+	0	-
$f''(x)$	-	-1	-

תחום עלייה: $0 < x < \frac{\pi}{2}$

תחום ירידה: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

תחום קעירות: $0 < x < \pi$

נקודת מקסימום: $x = \frac{\pi}{2}$

נקודת מינימום: אין

נקודת פיתול: אין

נקודת מקסימום מוחלט: $x = \frac{\pi}{2}$, נקודת מינימום מוחלט: אין

(ד) $f(x) = \sin^2(x)$

נשים לב שהפונקציה היא רציפה בכל מקום ובפרט בקטע שלנו, בנוסף הקטע חסום

וסגור ולכן גם מתקבל בו מינימום ומקסימום מוחלט.

$f'(x) = \sin(2x) = 0$ ב- $x = \frac{\pi}{4}$

$f''(x) = 2\cos(2x) = 0$ כאשר $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ ולכן אלה נקודות שחשודות לפיתול.

x	$0 < x < \frac{\pi}{4}$	$x = \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$	$x = \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$	$x = \frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4} < x < \pi$
$f(x)$	עולה	$\frac{1}{2}$	עולה	1	יורדת	$\frac{1}{2}$	יורדת
$f'(x)$	+	1	+	0	-	-1	-
$f''(x)$	+	0	-	-2	-	0	+

תחומי עלייה: $0 < x < \frac{\pi}{2}$

תחום ירידה: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

תחום קעירות: $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$

תחומי קמירות: $0 < x < \frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$

נקודת מקסימום מקומית: $x = \frac{\pi}{2}$

נקודות פיתול: $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$
 נמצא נקודות מינימום, מקסימום מוחלט: $f(0) = f(\pi) = 0$, $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ ולכן הקצוות
 הן נקודות מינימום מוחלט, $\frac{\pi}{2}$ היא נקודת מקסימום מוחלט.

שאלה 4

(א) הוכח שלמשוואה $2x = \cos(x)$ יש פתרון יחיד

פתרון:

נעביר אגף ונגדיר את הפונקציה הבאה: $g(x) = 2x - \cos(x)$
 g היא פונקציה רציפה בכל הממשיים ולכן נבדוק בעזרת משפט ערך הביניים האם יש
 בכלל פתרון:

$g(0) = -1 < 0$, $g(5) = 2 + \sin(x) > 0$, ולכן לפי משפט ערך הביניים יש לפחות
 פתרון אחד, נראה שהוא פתרון יחיד:
 $g'(x) = 2 + \sin(x) > 0$ לכל x ממשי, ולכן הפונקציה היא פונקציה עולה, ולכן בהכרח
 תחתוך את ציר ה- x בנקודה אחת בדיוק

(ב) מצא את מספר הפתרונות של המשוואות הבאות בקטע נתון:

$$(1) \quad x^4 + x^2 = 2 \quad \text{בקטע } [0, 2]$$

פתרון:

כמו מקודם נעביר אגף ונגדיר פונקציה $g(x) = x^4 + x^2 - 2$
 זו פונקציה רציפה בקטע נתון ובנוסף $g(0) = -2$, $g(2) = 18$ ולכן לפי משפט ערך
 הביניים יש לפחות פתרון אחד בקטע (הצבה פשוטה מראה ש- $x = 1$ מקיים את המשוואה)
 $g'(x) = 2x(2x^2 + 1)$ קל לראות שהנגזרת מתאפסת בנקודה $x = 0$, ובכל $0 < x \leq 2$
 $g'(x) > 0$ ולכן הפונקציה היא עולה ולכן תחתוך את ציר ה- x בנקודה אחת בלבד, ולכן
 יש רק פתרון יחיד $x = 1$.

$$(2) \quad e^x = 10x \quad \text{בקטע } [0, 10]$$

פתרון:

נגדיר $f(x) = e^x - 10x$, זו פונקציה רציפה, נבדוק האם יש לה בכלל פתרון בקטע:
 $f(0) = 1 > 0$, $f(10) = e^{10} - 100 > 0$, ולכן משפט ערך הביניים לא עוזר כאן.
 $f'(x) = e^x - 10 = 0$ כאשר $x = \ln(10) \in [0, 10]$,
 $f''(x) = e^x$, $f''(\ln(10)) = e^{\ln(10)} = 10 < 0$ ולכן זו נקודת מינימום מקומי.
 נתבונן בקטע $[0, \ln(10)]$: בקטע הזה הפונקציה היא רציפה, בנוסף $f(0) > 0$, $f(\ln(10)) < 0$
 ולכן יש פתרון בקטע הזה. בנוסף $f'(x) < 0$ שם ולכן יש בדיוק פתרון אחד ב- $[0, \ln(10)]$
 עכשיו נתבונן בקטע $[\ln(10), 10]$: גם שם הפונקציה היא רציפה, $f(\ln(10)) < 0$, $f(10) > 0$
 ולכן יש בקטע הזה עוד פתרון, ומשום שבקטע הזה הנגזרת היא חיובית אזי יש בדיוק
 פתרון אחד ב- $[\ln(10), 10]$

ולכן סה"כ יש 2 פתרונות לפונקציה בקטע נתון

(ג) תהי $f(x) = \ln^2(x) - 5\ln(x) + 6$ הוכיח כי קיימת נקודה $c \in [e^2, e^3]$ כך ש-
 $f'(c) = 0$

פתרון:

הפונקציה היא רציפה בקטע נתון וגזירה בקטע פתוח (e^2, e^3) , בנוסף $f(e^2) = f(e^3) = 0$
 ולכן לפי משפט רול קיימת $e^2 < c < e^3$ כך ש- $f'(c) = 0$