

בס"ד  
שאלון בחינה בקורס: משוואות דיפרנציאליות רגילות  
מספר הקורס: 83-115-01  
מרצה: דר' אלכסנדרה אגרנוביץ'  
סמסטר ב', מועד א': יטתמוז, התשע"ד (17.07.2014)  
משך הבחינה: שלוש שעות

חומר עזר: 3 דפים חד-צדדיים של A4, מחשבון רגיל (אין להשתמש במחשבון גרפי)

ניקוד: במבחן אפשר לצבור 115 נקודות.

יש לפרט שלבי החישוב נא לכתוב באופן ברור ומסודר. שאלה מבולגנת ולא מסודרת לא תוכל לזכות במלוא הנקודות.

## בהצלחה!

שאלה 1. (24 נקודות)

נתונה המשוואה

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} + x \tan \frac{y}{x^2}$$

א. מצאו את המשוואה המתקבלת מהצבה במשוואה הנתונה  $y(x) = v(x)x^2$ . הראו כי

המשוואה המתקבלת הינה משוואה הניתנת להפרדת משתנים;

ב. מצאו את הפתרון הפרטי של המשוואה הנתונה אשר מקיים  $y(\sqrt{2}) = \pi$ . היעזרו

בפתרון של סעיף א';

ג. קבעו על פי משפט קיום ויחידות האם קיים פתרון למשוואה הנתונה אשר מקיים

$$y(\sqrt{2}) = \pi \text{ בקטע סביב } x_0 = \sqrt{2} \text{ והאם הוא יחיד.}$$

שאלה 2. (16 נקודות)

א. נתונה המשוואה  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ . הראו כי אם  $R = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{xM - yN}$  כאשר

$R$  היא פונקציה של  $xy$  בלבד, אזי למשוואה הדיפרנציאלית הנתונה יש גורם

אינטגרציה מהצורה  $\mu(xy)$ ;

ב. פתרו  $\left(3x + \frac{6}{y}\right)dx + \left(\frac{x^2}{y} + 3\frac{y}{x}\right)dy = 0$

שאלה 3 . (16 נקודות)

- א. רשמו את צורת פתרון פרטי של המשוואה הלא-הומוגנית הבאה (אין צורך לחשב את המקדמים) :  $y''' - 2y' - 4y = 9xe^{2x} + 4\cos 2x - 6e^x \sin x$  , כאשר ידוע שאחד מהשורשים של המשוואה האופיינית עבור המשוואה ההומוגנית המתאימה שווה ל-2 .
- ב. מצאו שני פתרונות בלתי תלויים ליניארית בתחום  $x > 0$  של המשוואה  $x^2 y'' + 3xy' + 2y = 0$  . הוכחו אי-תלות של הפתרונות שמצאתם .

שאלה 4 . (32 נקודות)

- נתונה מערכת משוואות דיפרנציאליות  $\bar{x}' = A\bar{x}$  כאשר  $\bar{x} = \bar{x}(t)$  ;  $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2 & b \end{bmatrix}$  ;  $a, b \in \mathbb{R}$  - פרמטרים כלשהם .
- א. מצאו ביטוי לפתרון הכללי של המערכת. תתבוננו בכל המקרים האפשריים ;
- ב. פתרו את המערכת הנתונה בעזרת התמרת לפלס עבור כל המקרים האפשריים ;
- ג. מצאו את פתרון  $\bar{x}(t)$  המקיים  $a - b = 3$  ,  $\bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ;
- ד. פתרו מערכת לא הומוגנית  $\bar{x}' = A\bar{x} + \bar{c}$  עבור  $\bar{c} = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 - e^{-3t} \end{pmatrix}$  ,  $\bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ,  $a - b = 3$  בשיטת וריאציית הפרמטרים .
- הערה : אפשר להיעזר בנוסחת אינטגרציה  $\int t e^{at} du = \frac{at-1}{a^2} e^{at} + C$

שאלה 5 . (16 נקודות)

- א. הוכיחו ישירות (ללא הסתמכות על טבלת התמרת לפלס) כי  $L\{tf(t)\} = -F'(s)$  ;
- ב. בהינתן המשוואה  $y'' + ty = 0$  ,  $y(0) = 1$  ,  $y'(0) = 0$  . מצאו ביטוי ל-  $F(s)$  (אין צורך לפתור את האינטגרל בתשובה הסופית) ;
- ג. פתרו בעזרת התמרת לפלס את בעיית התחלה הבאה :  $y'' + 16y = 1$  ,  $y(0) = 1$  ,  $y'(0) = 2$

שאלה 6. (11 נקודות)

נגדיר

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ \sin 2t, & t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- א. (2 נק') כתבו נוסחה ל-  $f(t)$  בעזרת הפונקציה  $u_c(t)$  ;
- ב. (3 נק') חשבו את התמרת לפלס של  $f(t)$  ;
- ג. (6 נק') פתרו בעזרת התמרת לפלס את הבעיה  $y'' + ty = f(t)$  ,  $y(0) = -1$  ,  $y'(0) = 1$