תרגיל בית 14 אינפי 1 למדמ"ח - לא להגשה

1. האם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט/מתכנסים בתנאי/מתבדרים?

(א) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$

תשובה: נשים לב שהטור חיובי. כמו כן,

$$n+2 \leq 2n+2$$

ולכן

$$\frac{1}{2n}=\frac{n+1}{n(2n+2)}\leq\frac{n+1}{n(n+2)}$$

היות ש

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$$

הוא טור מתבדר גם הטור שלנו מתבדר.

(ב) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$

תשובה: קל לוודא ש

$$\frac{1}{\sqrt{n}+1}$$

מונוטונית יורדת ומתכנס ל 0 לכן, לפי מבחן לייבניץ הטור מתכנס. כעת נבדוק האם הטור עם ערך מוחלט מתכנס.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1}$$

נשים לב ש

$$\sqrt{n}+1\leq 2\sqrt{n}$$

ולכן

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}\leq\frac{1}{\sqrt{n}+1}$$

היות ש

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

הוא טור מתבדר, גם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$$

מתבדר. לסיכום: הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$$

מתכנס בתנאי.

(ג) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}}{2^n+n^2+5}$$

תשובה: נשים לב כי זהו טור חיובי. נשים לב כי

$$\frac{n^{100}}{2^n+n^2+5} \leq \frac{n^{100}}{2^n}$$

לכן אם נוכיח שהטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}}{2^n}$$

מתכנס נוכיח שגם הטור שלנו מתכנס (בהחלט). נפעיל את מבחן קושי על טור זה ונקבל

$$\sqrt[n]{\frac{n^{100}}{2^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^{100}}{2} \to \frac{1}{2} < 1$$

ולכן הטור מתכנס. כלומר הטור המקורי מתכנס בהחלט.

(ד) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^4-n^2}}$$

תשובה: הטור שלנו הוא בעצם

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-1}}$$

ברור כי $\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$היא סדרה מונוטונית יורדת המתכנסת ל 0. ולכן לפי לייבניץ הטור מתכנס. נבדוק התכנסות של הטור עם ערך מוחלט

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$$

נשים לב ש

$$\sqrt{n^2-1} \leq \sqrt{n^2} = n$$

ולכן

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$$

היות שהטור

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

מתבדר.גם הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$$

מתבדר. ולכן הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^4-n^2}}$$

מתכנס בתנאי.

(ה) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(\ln 3)^n}$

תשובה: נשים לב שהו טור חיובי. נשתמש במבחן קושי

$$\sqrt[n]{\frac{n^4}{(\ln 3)^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^4}{\ln 3} \to \frac{1}{\ln 3} < 1$$

ולכן הטור מתכנס (בהחלט).

(ו) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ עבור $a \in \mathbb{R}$

תשובה: נשים לב שאם $a = 0$ הטור בוודאי מתכנס בהחלט, לכן ניתן להניח ש $a \neq 0$ ולהשתמש במבחן דאלאמבר

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \frac{|a|}{n+1} \to 0$$

ולכן הטור מתכנס בהחלט.

(ז) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

תשובה: נשתמש במבחן קושי

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \frac{1}{\ln n} \to 0 < 1$$

ולכן הטור מתכנס בהחלט.

(ח) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln(\frac{n+1}{n})$

תשובה: ראשית נשים לב ש $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ היא סדרה מונוטונית יורדת המתכנסת ל 1 ולכן

$$\ln(\frac{n+1}{n})$$

היא סדרה מונוטונית יורדת המתכנסת ל 0. כמובן שהיא חיובית. לכן לפי לייבניץ הטור מתכנס. נבדוק אם גם הטור עם ערך מוחלט מתכנס. כלומר נבדוק האם

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(\frac{n+1}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(n+1) - \ln n$$

מתכנס. אבל זה טור שקל לחשב את הסכומים החלקיים שלו:

$$S_n = (\ln(n+1) - \ln n) + \cdots + (\ln 2 - \ln 1) = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$$

ולכן

$$S_n \to \infty$$

כלומר הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(\frac{n+1}{n})$$

מתבדר. למסקנה: הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln(\frac{n+1}{n})$$

מתכנס בתנאי.

(ט) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

תשובה: נשתמש במבחן דאלאמבר

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!}}{\frac{n!n!}{(2n)!}} = \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \to \frac{1}{4} < 1$$

ולכן הטור מתכנס בהחלט.

(י) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$

תשובה: נשים לב כי $a_n = \frac{1}{2^{\ln n}}$ היא סדרה חיובית מונוטונית יורדת ומתכנסת ל 0. לכן ניתן להשתמש במבחן העיבוי. כלומר הטור מתכנס אם ורק אם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{\ln 2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{n \ln 2}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-\ln 2)}$$

היות ש $1 - \ln 2 > 0$

$$2^{n(1-\ln 2)} \to \infty$$

וממילא הטור מתבדר.