פתרון תרגיל 12

1. תחילה נשחלף את המטריצה, ואח"כ נפעיל עליה פעולות שורה שלא משנות את הדטרמיננטה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & 7 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 7 & 9 \\ 2 & 9 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[+1000R_4+10000R_5]{R_1+10R_2+100R_3} \begin{pmatrix} 12343 & 21092 & 36601 & 47277 & 52292 \\ 2 & 1 & 6 & 7 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 7 & 9 \\ 2 & 9 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

כיון שקיבלנו שבשורה הראשונה מופיעים מספרים שמתחלקים ב-17 לפי הנתון בשאלה, הרי שכל הדטרמיננטה מתחלקת ב-17 לפי מה שלמדנו אנחנו יכולים "להוציא" כביכול 17 משורה ראשונה. ולכן זה מתחלק.

2.

$$|A| = \left|\begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}\right| = a^3+b^3+c^3-3abc, |B| = \left|\begin{pmatrix} a & b & . & . & b \\ b & a & . & . & . \\ \vdots & & & & \vdots \\ & . & . & . & b \\ b & . & . & b & a \end{pmatrix}\right| = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

המטריצות הפיכות כאשר הדטרמיננטות שונות מ-0 ....

3. א. $|A| = |A^t| = |-A| = (-1)^n|A| = -|A|$ ולכן $|A| = -|A| \Leftarrow |A| = 0$

ב. לא לדוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^t = A$$

$-A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ אך בגלל ש- $-1 = 1$ אז $A^t = -A$

$|A| \neq 0$.

4. תהי $A = (a_{ij})$ כך ש- $a_{ij} \in \{1, -1\}$. נחבר כל שורה לשורה הראשונה ונקבל בכל השורות פרט לשורה הראשונה רכיבים שהם או 0 או 2 ולכן מכל שורה נוכל להוציא החוצה 2 ולכן הדטרמיננטה של המטריצה A היא כפולה של 2^{n-1}.

5. א. $\prod_{i>j}(\alpha_i-\alpha_j)$

ב. אם כל $\alpha_i\neq\alpha_j$

6. א. אם במטריצה יש שורת או עמודת אפסים אז נפתח את הדטרמיננטה לפי השור / העמודה הזו ואז הדטרמיננטה שווה 0.

ב. אם המטריצה אלכסונית אז נפתח לפי העמודה הראשונה אז זה ייצא האיבר היחד ששונה מאפס כפול הדטרמיננטה של המטריצה שנשארה וכך נמשיך לפתח כל פעם לפי העמודה הראשונה של המטריצה שנשארה בסופו של דבר זה יצא מכפלת אברי האלכסון.

7. א. $|A_2|=7$ $|A_3|=15$

ב. $d_n=3d_{n-1}-2d_{n-2}$