בוחן מתמטיקה בדידה, קיץ תשע"ד

30.7.14 / ג' אב תשע"ד

הנחיות:

- ענו על כל השאלות. כל שאלה שווה 33 נקודות (סה"כ $1 + 3 \times 33 = 100$).
- משך הבוחן: שעה ורבע.
- **כיתבו כל תשובה בדף השאלה המתאימה לה. על כל דף רשמו ת.ז. וראשי תיבות של שמכם.**
- ללא חומר עזר
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.

שאלה	ציון
1	
2	
3	
נק' חינם	1
סה"כ	

בהצלחה!

1. תהא A קבוצה ו $\sim$ יחס שקילות עליה. נניח שקיימים 4 איברים שונים $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ המקיימים את התכונה הבאה: לכל $x \in A$ קיים i $(1 \leq i \leq 4)$ כך ש $x \sim a_i$.
מה הגדלים האפשריים לקבוצת המנה $A/\sim$? עבור כל גודל אפשרי, רשום דוגמא בה זה מתקיים. [כלומר, אם 100 זה גודל אפשרי לקבוצת המנה, רשום דוגמא ל A ויחס שקילות $\sim$ כך שהגודל של קבוצת המנה הוא 100] (33 נקו')

פתרון־ כל גודל מ־1 עד 4. נימוק: כיוון שכל $x \in A$ מתייחס לאחד מa_1, a_2, a_3, a_4 אזי קבוצת המנה היא $A/\sim = \{[a_1], [a_2], [a_3], [a_4]\}$ וכל השאלה האם רשמנו איברים כפולים (למשל האם $[a_1] = [a_2]$)

דוגמאות:

עבור $1 \leq i \leq 4$ נוכל לקחת את היחס על $\mathbb{N}$ המוגדר להיות מודולו i כלומר היחס $R_i = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \ : \ i \mid n - m\}$ ואז יתקיים כי $\mathbb{N}/R_1 = \{[0]\}, \mathbb{N}/R_2 = \{[0], [1]\}, \mathbb{N}/R_3 = \{[0], [1], [2]\}, \mathbb{N}/R_4 = \{[0], [1], [2], [3]\}$

2. תהא A קבוצה ו $\leq$ יחס סדר חלקי עליה. נגדיר יחס R על $A \times A$ ע"י
$\forall (a,b),(c,d) \in A \times A \quad (a,b)\,R\,(c,d) \iff [(a=c) \wedge (b \leq d)] \vee [(a \neq c) \wedge (a \leq c)]$
הוכח או הפרך - R יחס סדר חלקי. (33 נקו')

פתרון- הוכחה:

רפלקסיבי: לכל $(a,b) \in A \times A$ מתקיים כי $a = a \wedge b \leq b$ ולכן $(a,b)R(a,b)$

אנטי סימטרי: נניח $(a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(a,b)$. לפי הגדרת R נובע כי מתקיים בכל מקרה

$a \leq c \wedge c \leq a$. אזי כיוון ש $\leq$ יחס סדר מתקיים כי $a = c$ולכן מתקיים לפי הגדרת R כי $b \leq d \wedge d \leq b$ כיוון שזהו יחס סדר חלקי זה גורר כי $b = d$ ואז $(a,b) = (c,d)$

טרנזיטיביות - נניח $(a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f)$. לפי הגדרת R נובע כי מתקיים בכל מקרה

$a \leq c \wedge c \leq e$ וכיוון ש $\leq$ אנטי סימטרי נקבל כי $a \leq e$. אם $a \neq e$ אז $(a,b)R(e,f)$ לפי הגדרה וסיימנו.

אחרת $a = e$. במקרה זה $a \leq c \wedge c \leq e$ מתפרש כ $a \leq c \wedge c \leq a$ ולכן $a = c$. אם נחזור לנתון ההתחלתי, הוא כעת $(a,b)R(a,d) \wedge (a,d)R(a,f)$ ולפי הגדרת R נקבל כי $b \leq d \wedge d \leq f$

שוב מאנטי סימטריות נקבל כי $b \leq f$ ואז $(a,b)R(e,f)$ (כי התנאי $[(a = e) \wedge (b \leq f)]$ מתקיים.) ושוב סיימנו.

3. יהיו $A_1, A_2, \ldots A_n$ קבוצות. הוכיחו באינדוקציה כי מתקיים $\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c = \big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big)^c$. השיוויון נקרא כלל דה מורגן עבור n קבוצות. (33 נקו')

פתרון־ עבור $n = 1$ אכן מתקיים כי $\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c = A_1^c = (A_1)^c = \big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big)^c$.

כעת נניח כי הטענה עבור n כלשהוא ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n + 1$:

$$\big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\big)^c = \big((\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \cup A_{n+1}\big)^c = (\bigcup_{k=1}^{n} A_k)^c \cap A_{n+1}^c = [\text{Induction}] = \bigcap_{k=1}^{n} A_k^c \cap A_{n+1}^c = \bigcap_{k=1}^{n+1} A_k^c$$