סעיף 5. דוגמא של קבוצה לא מדידה

נתבונן במעגל C שאורכו 1. יהי α מספר נקבע אי-רציונלי. נאמר כי נקודות המעגל שייכות למחלקה אחת אם ניתן להעביר אחת לשנייה ע"י סיבוב המעגל על זווית $k\pi\alpha$ (k-שלם). בכל מחלקה יש מספר בן-מניה של נקודות (איברים). נבחר נקודה אחת מכל מחלקה ונוכיח שאוסף כל הנקודות האלו Φ_0 קבוצה לא מדידה.

נסמן כ-Φ_n את הקבוצה שמקבלים מ-Φ_0 ע"י הסיבוב $\alpha\pi n$. ברור שהקבוצות Φ_n זרות בזוגות, ואיחוד של כל ה-Φ_n הוא C. אילו Φ_0 הייתה מדידה, קבוצות חפיפות Φ_n גם היו מדידות. מפני ש-

$$C = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n \quad ; \qquad \Phi_n \cap \Phi_m = \phi \quad , \qquad\qquad n \neq m$$

מאדיטיביות-σ של המידה נובע למידת לבג ליניארית על C

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu(\Phi_n) \qquad\qquad (*)$$

אבל כל קבוצה חפיפה היא מאותה מידה, ז"א $\mu(\Phi_0) = \mu(\Phi_n)$. לכן (*) בלתי אפשרי, כי הטור שווה ל-0 אם $\mu(\Phi_0) = 0$ ול-∞ אם $\mu(\Phi_0) > 0$. בגלל הסתירה הזו Φ_0 (ואז כל Φ_n) לא מדידה.

סעיף 6. פונקציות מדידות

תהינה Y, X שתי קבוצות שרירותיות, ותהינה Σ_Y, Σ_X שתי מערכות תת-קבוצות של X ו-Y בהתאמה.

פונקציה מופשטת $y = f(x)$, $f : X \to Y$, עם תחום הגדרה X המקבלת ערכיה על Y נקראת מדידה-(Σ_Y, Σ_X) אם מ-$A \in \Sigma_Y$ נובע $f^{-1}(A) \in \Sigma_X$.

לכן ההגדרה הבאה היא הגדרת מדידות פונקציות המקבלות ערכים מספריים.

<u>הגדרה 6.1</u> – תהי X קבוצה שבה נתונה מידה μ אדיטיבית-σ המוגדרת על אלגברת-σ Σ_μ. פונקציה ממשית $f(x)$ על X נקראת מדידה-μ אם לכל קבוצת בורל A על הציר הממשי מתקיים $f^{-1}(A) \in \Sigma_\mu$.

באופן דומה פונקציה מרוכבת $\varphi(x)$ המוגדרת על X נקראת מדידה- μ אם $\varphi^{-1}(A)\in\Sigma_\mu$ לכל קבוצת בורל על המישור המרוכב. לא קשה לבדוק שזה שקול למדידות של חלק ממשי וחלק מדומה של הפונקציה.

פונקציה מספרית המוגדרת על הציר נקראת <u>פונקצית בורל</u> (או מדידה- B) אם המקור של כל קבוצת בורל הוא קבוצת בורל.

<u>משפט 6.2</u> – תהינה Z,Y,X קבוצות שרירותיות ו- $\Sigma_Z,\Sigma_Y,\Sigma_X$ מערכות קבוצות בהן בהתאמה. תהי הפונקציה $y=f(x)$ המוגדרת על X מדידה- (Σ_X,Σ_Y), ותהי הפונקציה $z=g(y)$ המוגדרת על Y מדידה- (Σ_Y,Σ_Z).
לכן הפונקציה $z=\varphi(x)=g(f(x))$ מדידה- (Σ_X,Σ_Z).

<u>הוכחה</u> – אם $A\in\Sigma_Z$, אז לפי מדידות- (Σ_Y,Σ_Z) של g $g^{-1}(A)=B\in\Sigma_Y$. לפי מדידות- (Σ_X,Σ_Y) של f הקבוצה $f^{-1}(B)$ שייכת ל- Σ_X, ז"א $f^{-1}(g^{-1}(A))=\varphi^{-1}(A)\in\Sigma_X$ ולבסוף φ היא מדידה- (Σ_X,Σ_Z). מש"ל. #

<u>מסקנה</u> – פונקצית בורל של פונקציה מספרית ומדידה- μ מדידה- μ. למשל, פונקציה רציפה של פונקציה מדידה- μ מדידה- μ.

נאמר **"מדידה"** במקום **מדידה-** μ אם ברור על מה מדובר.

<u>משפט 6.3</u> – פונקציה ממשית $f(x)$ מדידה **אם ורק אם** לכל c ממשי הקבוצה $\{x:f(x)<c\}$ מדידה.

<u>הוכחה</u> – הכרחיות ברורה כי $(-\infty,c)$ קבוצת בורל.
למספיקות, קודם כל ניקח בחשבון ש אלגברת- σ הנוצרת ע"י המערכת Σ של כל חצי-צירים $(-\infty,c)$ מתלכדת עם אלגברת- σ של כל קבוצות בורל על הציר. לפי סעיף 2, מזה נובע שהמקור של כל קבוצת בורל שייך ל אלגברת- σ הנוצרת ע"י מקורות של חצי-צירים השייכים ל- Σ, ולכן מדיד. מש"ל. #

ניתן להגדיר את המדידות של f ע"י מדידות כל הקבוצות $\{x:f(x)<c\}$.

מתברר שאוסף הפונקציות המדידות סגור לגבי פעולות אריתמטיות.

<u>משפט 6.4</u> – סכום, הפרש ומכפלה של שתי פונקציות מדידות הם מדידות. זה נכון גם לחילוק בתנאי שמכנה לא מתאפס.

<u>הוכחה</u> – נוכיח את המשפט בכמה שלבים.

א) אם f מדידה אז kf ו- $\alpha+f$ מדידות לכל α,k קבועים.

ב) אם g, f מדידות, אז הקבוצה $\{x: f(x) > g(x)\}$ מדידה. באמת.

$\{x: f(x) > g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\{x: f(x) > r_k\} \cap \{x: g(x) < r_k\})$ כאשר r_k מספרים רציונאליים.

מזה נובע שהקבוצה $\{x: f(x) > a - g(x)\} = \{x: f(x) + g(x) > a\}$ מדידה ולכן הסכום מדיד.

ג) מדידות ההפרש נובעת מ- א) ו- ב).

ד) למכפלת fg מתקיים $fg = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right]$ הריבוע מדיד לפי משפט 6.2. אם נוסיף א) - ג) נקבל מדידות של fg.

ה) אם f מדידה ו- $f(x) \neq 0$ אז $\frac{1}{f(x)}$ מדידה. באמת, אם $c > 0$

$$\{x: \frac{1}{f(x)} < c\} = \{x: f(x) > \frac{1}{c}\} \cup \{x: f(x) < 0\}$$

אם $c < 0$

$$\{x: \frac{1}{f(x)} < c\} = \{x: 0 > f(x) > \frac{1}{c}\}$$

ואם $c = 0$

$$\{x: \frac{1}{f(x)} < c\} = \{x: f(x) < c\}.$$

כל פעם נקבל קבוצה מדידה. בהשתמש עוד ב- ד) נקבל מדידות $\frac{g(x)}{f(x)}$ כאשר $f(x) \neq 0$. מש"ל. #

חשוב לדעת מה התגובה של מדידות על העברה לגבול.

<u>משפט 6.5</u> – אם סדרת פונקציות מדידות מתכנסת לכל $x \in X$ אז הגבול הוא פונקציה מדידה.

<u>הוכחה</u> – אם $f_n(x) \to f(x)$, אז

$$\{x: f(x) < c\} = \bigcup_k \bigcup_n \bigcap_{m>n} \{x: f_m(x) < c - \frac{1}{k}\}$$

באמת, אם $f(x) < c$, אז קיים k כך ש- $f(x) < c - \frac{2}{k}$; ל- k זה קיים n כך שלכל $m \geq n$ מתקיים $f_m(x) < c - \frac{1}{k}$.

ההפך, אם x שייך לצד ימין, אז קיים k כך שלכל m די גדול $f_m(x) < c - \frac{1}{k}$ ולכן $f(x) < c$ מוכל בצד שמאל.

מפני שהקבוצות $\{x: f_m(x) < c - \frac{1}{k}\}$ מדידות ומערכת קבוצות מדידות היא אלגברת-σ, אז הקבוצות $\{x: f(x) < c\}$ גם מדידות. מש"ל. #

כפי שהיה קודם, למידה אדיטיבית-σ על אלגברת-σ של תת-קבוצות של קבוצה X ניתן להתייחס כשלמה.
נניח בעתיד שזה תמיד מתקיים.

הגדרה 6.6 – שתי פונקציות g, f המוגדרות על אותה קבוצה מדידה E נקראות שקולות $(f \sim g)$ אם

$$\mu\{x : f(x) \neq g(x)\} = 0$$

נאמר שתכונה איזושהי מתקיימת כמעט בכל מקום אם היא מתקיימת על E פרט אולי לקבוצת נקודות מידת אפס. ז"א שתי פונקציות שקולות אם מתלכדות כמעט בכל מקום.

משפט 6.7 – הפונקציה $f(x)$ המוגדרת על קבוצה מדידה E ושקולה שם לפונקציה מדידה $g(x)$ גם מדידה.

הוכחה – מהגדרת השקילות נובע שהקבוצות $\{x : g(x) < a\}$ ו-$\{x : f(x) < a\}$ שונות אולי רק על קבוצת מידת אפס. מפני שהמידה שלמה, אז שתי קבוצות מדידות בבת אחת. מש"ל. #

הערה – שתי פונקציות רציפות שקולות אם ורק אם הן מתלכדות.
זה לא נכון לפונקציות רק מדידות. למשל, פונקצית דיריכלה שקולה לפונקצית אפס.

הגדרה 6.8 – סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}$ המוגדרת על מרחב איזשהו X עם מידה נתונה עליו נקראת מתכנסת כמעט בכל מקום לפונקציה $f(x)$ אם $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ לכמעט כל $x \in X$.

דוגמא – הסדרה $f_n(x) = (-x)^n$ המוגדרת על $[0,1]$ מתכנסת, כאשר $n \to \infty$, לפונקציה $f(x) \equiv 0$ כמעט בכל מקום (בכל נקודת $[0,1]$ פרט לנקודה $x = 1$).

משפט '6.5 – אם סדרת הפונקציות המדידות $f_n(x)$ מתכנסת לפונקציה $f(x)$ כמעט בכל מקום על X, אז $f(x)$ גם מדידה.

הוכחה- אם A הקבוצה שעליה $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ אז $\mu(X \setminus A) = 0$.
הפונקציה $f(x)$ מדידה על A, ומפני שכל פונקציה מדידה על קבוצת מידת אפס $f(x)$ מדידה על $X \setminus A$.
לכן f מדידה על X. מש"ל. #

הגדרה 6.10 – אומרים שסדרת פונקציות מדידות $\{f_n(x)\}$ מתכנסת במידה לפונקציה $f(x)$ אם לכל $\sigma > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\} = 0 .$$

<u>משפט 6.11</u> – אם סדרת פונקציות מדידות $\{f_n(x)\}$ מתכנסת כמעט בכל מקום לפונקציה $f(x)$ אז היא מתכנסת לאותה פונקציה במידה.

<u>משפט 6.12</u> (של ריס - F. Riesz) – אם סדרת הפונקציות המדידות $\{f_n(x)\}$ מתכנסת במידה ל- $f(x)$, אז ניתן לבחור תת-סדרה $\{f_{n_k}(x)\}$ המתכנסת ל- $f(x)$ כמעט בכל מקום.

פרק II. תורת האינטגרל של לבג

כל פעם שלא נאמר אחרת נתבונן במידה אדיטיבית- σ שלמה μ המוגדרת על אלגברת σ של קבוצות עם יחידה X. נניח שכל קבוצה $A\subset X$ מדידה, ופונקציות $f(x)$ מוגדרות ל- $x\in X$, ומדידות.

סעיף1. פונקציות פשוטות

<u>הגדרה 1.1</u>- פונקציה $f(x)$ המוגדרת על מרחב X עם מידה נקראת <u>פשוטה</u> אם היא מדידה ומקבלת בן-מניה ערכים לכל היותר.

המשפט הבא מתאר את המבנה של פונקציה פשוטה.

<u>משפט 1.2</u>- פונקציה $f(x)$ המקבלת לכל היותר בן-מניה ערכים שונים $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ מדידה אם ורק אם כל הקבוצות $A_n=\{x: f(x)=y_n\}$ מדידות.

<u>הוכחה</u>- הכרחיות ברורה כי כל A_n היא מקור של הקבוצה החד נקודתית $\{y_n\}$, וכל קבוצה חד נקודתית היא קבוצת בורל.

מספיקות נובעת מהעובדה שהמקור $f^{-1}(B)$ של קבוצת בורל B כלשהי הוא האיחוד $\bigcup\limits_{y_n\in B} A_n$ של מספר בן-מניה, לכל היותר, של קבוצות מדידות A_n, ואז מדיד. מש"ל. #

המשפט הבא נותן אפשרות להשתמש בפונקציות פשוטות לבניית אינטגרל לבג.

<u>משפט 1.3</u>- הפונקציה $f(x)$ מדידה אם ורק אם היא הגבול במידה שווה של סדרת פונקציות פשוטות ומדידות.

<u>הוכחה</u>- מספיקות נובעת ממשפט 6.5 מהפרק הקודם.

להכרחיות נתבונן בפונקציה מדידה כלשהי $f(x)$ ונניח $f_n(x)=\frac{m}{n}$ אם $\frac{m}{n}\le f(x)<\frac{m+1}{n}$ (כאשר m שלם ו- n טבעי). ברור שפונקציות $f_n(x)$ פשוטות. הן מתכנסות במידה שווה ל- $f(x)$ כאשר $n\to\infty$, כי $|f(x)-f_n(x)|\le\frac{1}{n}$. #

סעיף 2. האינטגרל של לבג לפונקציות פשוטות

נניח ש- f פונקציה פשוטה המקבלת את הערכים $;y_i \neq y_j, i \neq j$ $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ ותהי A תת-קבוצה מדידה של X .

הגדרה 2.1- פונקציה פשוטה f נקראת אינטגרבילית לפי המידה μ, על הקבוצה A אם הטור

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_n y_n \mu(A_n) \quad , A_n = \{x : x \in A, f(x) = y_n\}$$

מתכנס בהחלט. אם f אינטגרבילית אז סכום הטור נקרא האינטגרל של f (מ)על הקבוצה A.

לא צריך בהכרח להניח כי פונקציה מקבלת ערכים שונים.

למה 2.2 – נניח $A = \bigcup_k B_k ; B_i \cap B_j = \phi ; i \neq j$ והפונקציה f מקבלת על B_k רק ערך אחד C_k, אז

$$\int_A f(x)d\mu = \sum C_k \mu(B_k)$$

והפונקציה f אינטגרבילית מעל A אם ורק אם הטור מתכנס בהחלט.

הוכחה – ברור כי כל A_n היא איחוד של B_k שעבורן $C_k = y_n$. לכן

$$\sum_n y_n \mu(A_n) = \sum_n y_n \sum_{C_k = y_n} \mu(B_k) = \sum_k C_k \mu(B_k)$$

מפני שמידה אי-שלילית

$$\sum_n |y_n| \mu(A_n) = \sum_n |y_n| \sum_{C_k = y_n} \mu(B_k) = \sum_k |C_k| \mu(B_k)$$

והטורים $\sum y_n \mu(A_n)$ ו- $\sum_k C_k \mu(B_k)$ מתכנסים או מתבדרים בבת אחת. מש"ל.   #

נסתכל על תכונות אינטגרל לבג לפונקציות פשוטות:

א) $$\int_A [f(x) + g(x)]d\mu = \int_A f(x)d\mu + \int_A g(x)d\mu$$

כאשר מקיום האינטגרלים באגף ימין נובע קיום האינטגרל באגף שמאל.

הוכחה – נניח כי f מקבלת הערכים f_i על הקבוצות $A \supset F_i$, ו- g הערכים g_j על $A \supset G_j$, ז"א

$$J_1=\int_A f(x)d\mu=\sum_i f_i\mu(F_i)$$

$$J_2=\int_A g(x)d\mu=\sum_j g_j\mu(G_j)$$

לפי הלמה
$$J=\int_A[f(x)+g(x)]d\mu=\sum_i\sum_j(f_i+g_j)\mu(F_i\cap G_j)$$

אבל
$$\mu(F_i)=\sum_j\mu(F_i\cap G_j),\quad \mu(G_j)=\sum_i\mu(F_i\cap G_j)$$

לכן מהתכנסות מוחלטת של הטורים ל- J_1, J_2 נובעת התכנסות מוחלטת של הטור ל- J ; וגם $J=J_1+J_2$.

ב) לכל k קבוע
$$\int_A kf(x)d\mu=k\int_A f(x)d\mu$$

ג) פונקציה פשוטה f חסומה על A אינטגרבילית שם, ואם $|f(x)|\le M$ על A אז
$$\left|\int_A f(x)d\mu\right|\le M\mu(A)$$

סעיף 3. הגדרת אינטגרל לבג כללית על קבוצת מידה סופית

<u>הגדרה 3.1</u> – הפונקציה f נקראת <u>אינטגרבילית</u> (מ)על הקבוצה A אם קיימת סדרת הפונקציות **הפשוטות** $\{f_n\}$ **האינטגרביליות** מעל A המתכנסת **במידה שווה** ל- f. נסמן את הגבול $I=\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)d\mu$ כ- $\int_A f(x)d\mu$, והוא נקרא **האינטגרל** של f מעל A.

צריך שמתקיימים 3 תנאים בשביל נכונות ההגדרה:

(א) הגבול קיים לכל סדרת פונקציות פשוטות המתכנסת במידה שווה.

(ב) הגבול לא תלוי בבחירת סדרת פונקציות $\{f_n\}$ כאשר f נתונה.

(ג) לפונקציה פשוטה ההגדרה מתלכדת עם ההגדרה מסעיף 2.

באמת, התנאים האלה מתקיימים. ל- (א) מהתכונות מקבלים

$$\left|\int_A f_n(x)d\mu-\int_A f_m(x)d\mu\right|\le\mu(A)\sup_{x\in A}|f_n(x)-f_m(x)|$$

כדי להוכיח את (ב), נסתכל על שתי סדרות $\{f_n\}$ ו- $\{f_n^*\}$ המתכנסות ל- f. אם נקבל I שונים, אז נגיע לאי-קיום של I לאיחוד הסדרות, בניגוד ל- (א).

ל- (ג) פשוט נסתכל על הסדרה שעבורה $f_n = f$ לכל n.

עתה נסתכל על **תכונות** של אינטגרל לבג כללי:

(א) $$\int_A 1 d\mu = \mu(A)$$

(ב) לכל k קבוע $$\int_A kf(x)d\mu = k\int_A f(x)d\mu$$

פשוט נעבור לגבול ב- ב) לפונקציה פשוטה.

(ג) אדיטיביות: $$\int_A [f(x)+g(x)]d\mu = \int_A f(x)d\mu + \int_A g(x)d\mu$$

נעבור לגבול ב- א) לפשוטות.

(ד) פונקציה f חסומה על A אינטגרבילית שם.

נשתמש במשפט 1.3 ונעבור לגבול ב- ג) לפשוטות.

(ה) **מונוטוניות**: אם $f(x) \geq 0$ אז $\int_A f(x)d\mu \geq 0$ (אם האינטגרל קיים).

לפונקציות פשוטות זה נובע מן ההגדרה; במקרה כללי אם f מדידה ואי-שלילית אז קיימת סדרת פונקציות פשוטות אי-שליליות המתכנסת אליה במידה שווה.

מ- (ה) נובע שאם $f(x) \geq g(x)$ אז $\int_A f(x)d\mu \geq \int_A g(x)d\mu$

ואם $m \leq f(x) \leq M$ אז $m\mu(A) \leq \int_A f(x)d\mu \leq M\mu(A)$

(ו) אם $\mu(A) = 0$ אז $\int_A f(x)d\mu = 0$

(ו') אם $f(x) = g(x)$ **כמעט בכל מקום** אז $\int_A f(x)d\mu = \int_A g(x)d\mu$

והאינטגרלים קיימים או לא קיימים בבת אחת.

נובעות ישר מן ההגדרה.

(ז) אם הפונקציה φ אינטגרבילית מעל A וכמעט בכל מקום $|f(x)| \leq \varphi(x)$, אז f גם אינטגרבילית מעל A.

הוכחה – נניח קודם שפונקציות f, φ פשוטות. קיימת קבוצה A', $A' \subset A$, $\mu(A \setminus A') = 0$,

שהיא איחוד מספר סופי או בן-מניה קבוצות A_n שעליהן f, φ קובעות : $f(x)=a_n$, $\varphi(x)=b_n$,

$|a_n| \le b_n$. מאינטגרביליות של φ נובע

$$\sum_n |a_n| \mu(A_n) \le \sum_n b_n \mu(A_n) = \int_{A'} \varphi(x) d\mu = \int_A \varphi(x) d\mu$$

לכן f גם אינטגרבילית ומתקיים

$$\left|\int_A f(x) d\mu\right| = \left|\int_{A'} f(x) d\mu\right| = \left|\sum_n a_n \mu(A_n)\right| \le \sum_n |a_n| \mu(A_n) = \int_{A'} |f(x)| d\mu \le \int_A \varphi(x) d\mu$$

במקרה כללי נשתמש במשפט 1.3 ונעבור לגבול.

(ח) האינטגרלים $I_1 = \int_A f(x) d\mu$ ו- $I_2 = \int_A |f(x)| d\mu$ קיימים או לא קיימים בבת אחת.

אם I_2 קיים אז I_1 קיים - מ- (ז). ההפך לפונקציה פשוטה נובע מן ההגדרה. המקרה הכללי מוכיחים, כרגיל, בהשתמש במשפט 1.3 ובהעברה לגבול; גם נצטרך באי-שוויון $||f|-|f_n|| \le |f-f_n|$.

סעיף 4. אדיטיביות-σ ורציפות מוחלטת של אינטגרל לבג

נסתכל על אינטגרל לבג כפונקצית קבוצות $F(A) = \int_A f(x) d\mu$ המוגדרת על קבוצות מדידות A.

<u>**משפט 4.1**</u> – אם $A = \bigcup_n A_n$; $A_i \cap A_j = \phi$; $i \ne j$; אז $\int_A f(x) d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x) d\mu$.

מקיום האינטגרל באגף שמאל נובע קיום האינטגרל באגף ימין וגם התכנסות מוחלטת של הטור.

<u>**הוכחה**</u> – נבדוק את הטענה קודם לפונקציה פשוטה f עם ערכים $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ נסמן

$$B_k = \{x : x \in A, f(x) = y_k\}$$
$$B_{nk} = \{x : x \in A_n, f(x) = y_k\}$$

לכן
$$\int_A f(x) d\mu = \sum_k y_k \mu(B_k) = \sum_k y_k \sum_n \mu(B_{nk}) = \sum_n \sum_k y_k \mu(B_{nk}) = \sum_n \int_{A_n} f(x) d\mu$$

מפני שהטור $\sum y_k \mu(B_k)$ מתכנס בהחלט ל- f אינטגרבילית ומידות הקבוצות הן אי-שליליות, שאר הטורים מתכנסים בהחלט.

לפונקציה f כללית אינטגרביליות שלה משמע כי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת פונקציה פשוטה g אינטגרבילית על A ומקיימת $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$.

לפונקציה g מתקיים $\int_A g(x)d\mu = \sum_n \int_{A_n} g(x)d\mu$, ו- g אינטגרבילית על כל A_n והטור מתכנס בהחלט.

מזה ומן העובדה ש- g קירוב ל- f נובע כי f אינטגרבילית על A_n. לכן

$$\sum_n \left| \int_{A_n} f(x)d\mu - \int_{A_n} g(x)d\mu \right| \le \sum_n \varepsilon\mu(A_n) = \varepsilon\mu(A)$$

$$\left| \int_A f(x)d\mu - \int_A g(x)d\mu \right| \le \varepsilon\mu(A)$$

מכל זה נובעות התכנסות מוחלטת של הטור $\sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu$ וההערכה

$$\left| \sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu - \int_A f(x)d\mu \right| \le 2\varepsilon\mu(A).$$

מפני ש- ε קטן כרצוננו $\sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu = \int_A f(x)d\mu$. מש"ל. #

<u>מסקנה</u> – אם f אינטגרבילית על A היא גם אינטגרבילית על כל תת-קבוצה $A' \subset A$ מדידה שהי.

גם נכון משפט הפוך (מבחינה מסוימת)

<u>משפט 4.2</u> – אם $A = \bigcup_n A_n$; $A_i \cap A_j = \phi$; $i \ne j$, והטור $\sum_n \int_{A_n} |f(x)|d\mu$ מתכנס, אז הפונקציה f אינטגרבילית מעל A ומתקיים $\int_A f(x)d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu$.

<u>אי-השוויון של צ'בישב Chebyshev-</u>

אם $\varphi(x) \ge 0$ על A ו- $C > 0$, אז $\mu\{x : x \in A, \varphi(x) \ge C\} \le \frac{1}{C}\int_A \varphi(x)d\mu$.

<u>הוכחה</u> – אם $A' = \{x : x \in A, \varphi(x) \ge C\}$, אז

$\int_A \varphi(x)d\mu = \int_{A'} \varphi(x)d\mu + \int_{A\backslash A'} \varphi(x)d\mu \ge \int_{A'} \mu(x)d\mu \ge C\mu(A')$. מש"ל. #

<u>מסקנה</u> – אם $\int_A |f(x)|d\mu = 0$, אז $f(x) = 0$ כמעט בכל מקום.

<u>הוכחה</u> – לפי אי-השוויון של צ'בישב $\mu\{x : x \in A, |f(x)| \ge \frac{1}{n}\} \le n\int_A |f(x)|d\mu = 0$ לכל n.

לכן $\mu\{x: x\in A, |f(x)|\ge \frac{1}{n}\}=0$. $\mu\{x: x\in A, f(x)\neq 0\}\le \sum_{n=1}^{\infty}\mu\{x: x\in A, |f(x)|\ge \frac{1}{n}\}$. מש"ל. #

זה המקרה הקיצוני של המשפט החשוב הבא.

<u>משפט 4.3</u> (רציפות מוחלטת של אינטגרל לבג) – אם f אינטגרבילית על A, לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש- $\left|\int_e f(x)d\mu\right|<\varepsilon$ לכל קבוצה מדידה $e\subset A$ המקיימת $\mu(e)<\delta$.

<u>הוכחה</u> – המשפט ברור אם f חסומה. ל- f שרירותית נניח $A_n=\{x: x\in A, n\le |f(x)|<n+1\}$,

$C_N=A\setminus B_N$, $B_N=\bigcup_{n=0}^{N}A_n$.

לפי משפט 4.1 $\int_A |f(x)|d\mu=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{A_n}|f(x)|d\mu$.

נבחר N כך ש- $\sum_{n=N+1}^{\infty}\int_{A_n}|f(x)|d\mu=\int_{C_N}|f(x)|d\mu<\frac{\varepsilon}{2}$

ויהי $0<\delta<\frac{\varepsilon}{2(N+1)}$. אם עתה $\mu(e)<\delta$, אז

$$\left|\int_e f(x)d\mu\right|\le\int_e |f(x)|d\mu=\int_{e\cap B_N}|f(x)|d\mu+\int_{e\cap C_N}|f(x)|d\mu .$$

לפי תכונה (ה), האינטגרל הראשון באגף ימין לא גדול מ- $\frac{\varepsilon}{2}$; השני לא גדול מ- $\int_{C_N}|f(x)|d\mu<\frac{\varepsilon}{2}$,

ולכן $\int_e |f(x)|d\mu<\varepsilon$. מש"ל. #

משהוכחנו על האינטגרל כפונקצית קבוצות ניתן לנסח באופן הבא.

תהי f פונקציה אי-שלילית האינטגרבילית על המרחב X לפי המידה μ. אז הפונקציה

$$F(A)=\int_A f(x)d\mu$$

מוגדרת לכל קבוצה מדידה $A\subset X$, אי-שלילית ואדיטיבית-σ, ז"א אם $A=\bigcup_n A_n$ ו- $A_i\cap A_j=\phi$, $i\neq j$, אז $F(A)=\sum_n F(A_n)$. במילים אחרות, לאינטגרל של פונקציה אי-שלילית כפונקצית קבוצות יש כל התכונות של מידה אדיטיבית-σ. היא מוגדרת על אותה אלגברת-σ שמידה מקורית μ מוגדרת עליה. שתי מידות קשורות ע"י התנאי: אם $\mu(A)=0$ אז $F(A)=0$.

סעיף 5. העברה לגבול תחת אינטגרל לבג

בדרך-כלל, באנליזה קלאסית התנאי לזה (או לאינטגרציית הטור איבר-איבר) הוא התכנסות במידה שווה. נוכיח כמה משפטים כלליים באנליזה מודרנית.

<u>משפט 5.1</u> (של לבג על התכנסות נשלטת) – אם הסדרה $\{f_n\}$ מתכנסת כמעט בכל מקום על A ל-f, ולכל n כמעט בכל מקום $|f_n(x)| \le \varphi(x)$ כאשר φ אינטגרבילית על A, אז f אינטגרבילית על A ו-$\int_A f_n(x)d\mu \to \int_A f(x)d\mu$.

<u>הוכחה</u> – ברור שגם $\varphi(x) \ge |f(x)|$ כמעט בכל מקום, ולכן f אינטגרבילית לפי תכונה (ז). ניקח $\varepsilon > 0$, לפי משפט 4.3 על רציפות מוחלטת של אינטגרל, קיים $\delta > 0$ כך שאם $\mu(B) < \delta$ אז $\int_B \varphi(x)d\mu < \frac{\varepsilon}{4}$. לפי משפט יגורוב, ניתן לבחור קבוצה B כך שהסדרה $\{f_n\}$ מתכנסת על $C = A \setminus B$ במידה שווה. לכן קיים N כזה שלכל $n \ge N$ ולכל $x \in C$ מתקיים $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(C)}$. לכן

$$\int_A f(x)d\mu - \int_A f_n(x)d\mu = \int_C [f(x) - f_n(x)]d\mu + \int_B f(x)d\mu - \int_B f_n(x)d\mu$$

ומזה נובע $\left|\int_A f(x)d\mu - \int_A f_n(x)d\mu\right| \le \frac{\varepsilon}{2\mu(C)}\mu(C) + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$. מש"ל. #

<u>מסקנה</u> – אם כמעט בכל מקום $|f_n(x)| \le M = const$ ו-$f_n \to f$, אז $\int_A f_n(x)d\mu \to \int_A f(x)d\mu$.

התנאי שהתכנסות נשלטת חשוב. באמת, נתבונן בדוגמה. תהי

$$f_k(x) = \begin{cases} k, & 0 < x < \frac{1}{k} \\ 0, & \frac{1}{k} \le x < 1 \end{cases}$$

מתקיים $f_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ לכל $x \in (0,1)$, ז"א $f_k(x) \to f(x) \equiv 0$. אבל

$$\int_0^1 f_k(x)dx = k\frac{1}{k} = 1 \not\to 0 \; .$$

הערה – ניתן להניח שמתקיים $f_n \to f$ **במידה** במקום כמעט בכל מקום.

משפט 5.2 (של בפו לווי – Beppo Levi) – אם על הקבוצה A $f_1(x) \le f_2(x) \le \dots \le f_n(x) \le \dots$ והפונקציות f_n כולן אינטגרביליות והאינטגרלים שלהן חסומים באותו קבוע $\int_A f_n(x)d\mu \le K$, אז **כמעט בכל מקום** על A קיים גבול (סופי) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, הפונקציה f אינטגרבילית על A ומתקיים

$$\int_A f_n(x)d\mu \to \int_A f(x)d\mu \; .$$

הערה – בקבוצה שהגבול של $\{f_n\}$ לא קיים בה ניתן להגדיר f באופן כלשהו, למשל, $f(x)=0$ עליה.

הוכחה – נניח כי $f_1(x) \ge 0$, אחרת נסתכל על סדרת הפונקציות $\tilde{f}_n = f_n - f_1$. נתבונן בקבוצה

$$\Omega = \{x : x \in A, f_n(x) \to \infty\}$$

ברור כי $\Omega = \bigcap_r \bigcup_n \Omega_n^{(r)}$, כאשר $\Omega_n^{(r)} = \{x : x \in A, f_n(x) > r\}$.

לפי אי-השוויון של צ'בישב $\mu(\Omega_n^{(r)}) \le \frac{k}{r}$. מפני ש- $\Omega_1^{(r)} \subset \Omega_2^{(r)} \subset \dots \subset \Omega_n^{(r)} \subset \dots$,

מתקיים $\mu(\bigcup_n \Omega_n^{(r)}) \le \frac{k}{r}$.

אבל לכל r $\Omega \subset \bigcup_n \Omega_n^{(r)}$, לכן $\mu(\Omega) \le \frac{k}{r}$. מפני ש- r שרירותי, $\mu(\Omega)=0$. זה משמע שהסדרה המונוטונית $\{f_n(x)\}$ מתכנסת כמעט לכל $x \in A$, ונסמן את הגבול כ- $f(x)$.

נסמן עתה כ- A_r קבוצת הנקודות $x \in A$ שעבורן $r-1 \le f(x) < r$, $r = 1,2,\dots$ ונניח $\varphi(x) = r$ על A_r.

אם נוכיח אינטגרביליות של φ על A, אז המשפט נובע מן המשפט הקודם. נסמן $B_S = \bigcup_{r=1}^{S} A_r$. מפני שעל B_S הפונקציות f, f_n חסומות ותמיד $\varphi(x) \le f(x)+1$,

$$\int_{B_S} \varphi(x)d\mu \le \int_{B_S} f(x)d\mu + \mu(A) = \lim_{n\to\infty}\int_{B_S} f_n(x)d\mu + \mu(A) \le K + \mu(A) \; .$$

אבל $\int_{B_S} \varphi(x)d\mu = \sum_{r=1}^{S} r\mu(A_r)$, ז"א הסכומים האלה חסומים ולכן מתכנס הטור

$$\sum_{r=1}^{\infty} r\mu(A_r) = \int_A \varphi(x)d\mu$$

כך הוכחנו את האינטגרביליות של φ על A. משל"ל. #

הערה – ברור שבמקום סדרה עולה ניתן להסתכל על סדרה יורדת.

מסקנה – אם $\Psi_n(x) \geq 0$ ומתקיים $\sum_{n=1}^{\infty}\int_A \Psi_n(x)d\mu < \infty$, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n(x)$ מתכנס על A כמעט בכל מקום ומתקיים

$$\int_A (\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n(x))d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_A \Psi_n(x)d\mu .$$

משפט 5.3 (של פטו – Fatou)- אם סדרת הפונקציות המדידות ואי-השליליות $\{f_n\}$ מתכנסת על A לפונקציה f כמעט בכל מקום ומתקיים $\int_A f_n(x)d\mu \leq K$, אז f אינטגרבילית על A ומתקיים $\int_A f(x)d\mu \leq K$.

הוכחה – נסמן $\varphi_n(x) = \inf_{k\geq n} f_k(x)$.

הפונקציה φ_n מדידה כי $\{x : \varphi_n(x) < C\} = \bigcup_{k\geq n}\{x : f_k(x) < C\}$

מפני ש- $0 \leq \varphi_n(x) \leq f_n(x)$, הפונקציות φ_n אינטגרביליות ומתקיים $\int_A \varphi_n(x)d\mu \leq \int_A f_n(x)d\mu \leq K$;

ולבסוף $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq K \leq \varphi_n(x) \leq K$ ו- $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = f(x)$ כמעט בכל מקום.

נשתמש במשפט הקודם לסדרה $\{\varphi_n\}$ ונקבל את התוצאה הנדרשת. משל"ל. #