אינפי 3 תרגיל בית 2

11 בנובמבר 2015

שאלה 1

יהי $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, הוכח כי

$$\frac{| x_1 | +....+ | x_n |}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} \leq | x_1 | +...+ | x_n |$$

רמז: בשביל אחד מצדדי אי השוויון יש להשתמש באי שוויון קושי שוורץ.

שאלה 2

תהי $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ מטריקה. הוכח כי הפונקציות הבאות הן מטריקות:

א) $\alpha(x, y) = min \{d(x, y), 1\}$

ב) $\beta(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$

שאלה 3

הוכיחו: שפה של קבוצה היא קבוצה סגורה.

שאלה 4

עבור קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$, נסמן ב $limA$ את אוסף נקודות הגבול של A. הוכח/הפרך את הטענות הבאות:

א) לכל שתי קבוצות $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ מתקיים $limA \cap limB \subseteq lim(A \cap B)$.

ב) לכל שתי קבוצות $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ מתקיים $limA \cap limB \supseteq lim(A \cap B)$.

ג) לכל שתי קבוצות $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ מתקיים $limA \cup limB = lim(A \cup B)$.

ד) לכל סדרה של קבוצות $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתקיים $lim \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} limA_n$.

שאלה 5

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה. הוכח כי $limA$ היא קבוצה סגורה.

שאלה 6

יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $A\subseteq X$. הוכח כי התנאים הבאים שקולים:
א) קיימים $x_0\in X$ ו־$0<r\in\mathbb{R}$ כך ש־$A\subseteq B\left(x_0,r\right)$.
ב) לכל $x_0\in X$ קיים $0<r\in\mathbb{R}$ כך ש־$A\subseteq B\left(x_0 r\right)$.
ג) קיים $0<M\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x,y\in A$ מתקיים $d\left(x,y\right)<M$.
הערה: קבוצה A המקיימת תכונות אלה נקראת חסומה.

שאלה 7

קבע האם כל אחת מהקבוצות הבאות ב־$\mathbb{R}^n$ אם היא פתוחה או אם היא סגורה (הוכח/הפרך):
א) $C=\{(x,y)\mid x>0,y<0\}$
ב) $B=(0,1)$ ב־$\mathbb{R}$.
ג) כל המישור $\mathbb{R}^3$.

שאלה 8

יהי (X,d) מרחב מטרי.
א) הוכיחו כי $x\in X$ נקודת הצטברות של $A\subseteq X\Leftrightarrow$קיימת סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq A$ שכל איבריה שונים המתכנסת ל־x.
ב) הוכיחו כי $x\in X$ נקודת הצטברות של $A\subseteq X$ $\Leftrightarrow$ לכל $r>0$ $B\left(x,r\right)$ מכיל אינסוף נקודות שונות של A.