

1. מצאו את הנגזרות של הפונקציות הבאות לפי הגדרה:

א. $f(x) = \frac{11}{8}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{11}{8} - \frac{11}{8}}{h} = 0$$

ב. $f(x) = 6x + 5$
ג.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(x+h) + 5 - 6x - 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h}{h} = 6$$

ד. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 - 2(x+h) + 1 - 3x^2 + 2x - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6xh + 3h^2 - 2h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 6x - 2 + 3h = 6x - 2 \end{aligned}$$

ה. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2+1} - \frac{1}{x^2+1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2+1-x^2-2xh-h^2-1}{h[(x+h)^2+1](x^2+1)} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

ו. $f(x) = \sqrt{6x^2 + x + 6}$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{6(x+h)^2 + (x+h) + 6} - \sqrt{6x^2 + x + 6}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(x+h)^2 + (x+h) + 6 - (6x^2 + x + 6)}{h[\sqrt{6(x+h)^2 + (x+h) + 6} + \sqrt{6x^2 + x + 6}]} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12x + 1 + 6h}{[\sqrt{6(x+h)^2 + (x+h) + 6} + \sqrt{6x^2 + x + 6}]} = \frac{12x + 1}{2\sqrt{6x^2 + x + 6}} \end{aligned}$$

2. מצאו את משוואת המשיק של הפונקציה $f(x) = x^4 - x + 1$ בנקודה $x = 1$, באשר את הגזירה יש לבצע לפי הגדרה.

המשוואה של המשיק נתונה לפי $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^4 - (1+h) + 1 - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^4 + 4h^3 + 6h^2 + 4h + 1 - 1 - h}{h} = 3 = f'(1) \end{aligned}$$

$$y = 3x - 2$$

3. גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = (((2x + 3)^4 + 5)^6 + 7)^8$

משתמשים בכלל השרשרת:

$$f(x) = (g(x))^8$$

$$g(x) = (h(x))^6 + 7$$

$$h(x) = (l(x))^4 + 5$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8(g(x))^7 g'(x) = 8(g(x))^7 6(h(x))^5 h'(x) = 8(g(x))^7 6(h(x))^5 4(l(x))^3 l'(x) \\ &= 8(g(x))^7 6(h(x))^5 4(l(x))^3 2 \\ &= 384(((2x + 3)^4 + 5)^6 + 7)^7 ((2x + 3)^4 + 5)^5 (2x + 3)^3 \end{aligned}$$

ב. $f(x) = \frac{(x+1)^2+1}{(x^2-3x-3)^{20}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4(x+1)((x+1)^2+1)(x^2-3x-3)^{20} - 20(x^2-3x-3)^{19}(2x-3)}{(x^2-3x-3)^{40}} \\ &= \frac{4(x+1)((x+1)^2+1)(x^2-3x-3) - 20(2x-3)}{(x^2-3x-3)^{21}} \end{aligned}$$

ג. $f(x) = \ln(\ln(\frac{3x-12}{x^2+1}))$

$$f'(x) = \frac{(\ln(\frac{3x-12}{x^2+1}))'}{\ln(\frac{3x-12}{x^2+1})} = \frac{\frac{(\frac{3x-12}{x^2+1})'}{\frac{3x-12}{x^2+1}}}{\ln(\frac{3x-12}{x^2+1})} = \frac{x^2-8x-1}{(x^2+1)(4-x)\ln(\frac{3x-12}{x^2+1})}$$

ד. $f(x) = \sqrt[6]{7x^2-3}$

$$f(x) = (7x^2 - 3)^{\frac{1}{6}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{6}(7x^2 - 3)^{-\frac{5}{6}} 14x = \frac{7x\sqrt[6]{7x^2-3}}{3(7x^2-3)}$$

ה. $f(x) = \tan(5x + \sqrt{x^2 - 2x - 1})$

$$f'(x) = \frac{(5x + \sqrt{x^2 - 2x - 1})'}{\cos^2(5x + \sqrt{x^2 - 2x - 1})} = \frac{5 + \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}}{\cos^2(5x + \sqrt{x^2 - 2x - 1})}$$

$$f(x) = (x - 5)^{2x+4} \quad .1$$

$$f'(x) = (x - 5)^{2x+4} \left[2 \ln(x - 5) + \frac{(2x + 4)}{x - 5} \right]$$

$$f(x) = (\sin x)^{\cos x} \quad .2$$

$$f'(x) = (\sin x)^{\cos x} \left[-\sin x \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right] = (\sin x)^{1+\cos x} \left[\frac{1}{\tan^2 x} - \ln(\sin x) \right]$$

$$f(x) = \sin(x^{\cos x}) \quad .3$$

$$f'(x) = \cos(x^{\cos x}) x^{\cos x} \left[-\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x} \right]$$

4. א. מצאו את הנגזרת השנייה של $y = e^{e^x}$ (כלומר גזרו, ואז גזרו שוב את התוצאה) שימו לב: $e^{e^x} = e^{(e^x)}$

$$y' = e^{e^x} e^x = e^{e^x+x}$$

$$y'' = e^{e^x+x} (e^x + 1)$$

ב. מצאו את הנגזרת השביעית של $y = 3e^{2x+5} + 16x + 4 + \sin(2x)$

$$y' = 384e^{2x+5} - 128 \cos(2x)$$