תרגול 11-אושרית

חזרה נושא עוצמות ואריתמטיקה שאלות ממבחנים

תרגיל ממבחן: תהי A קבוצה אינסופית.

סימון:

$|A|=a$

$B=P(A)$

$F=A\times P(A)$

$C=(P(A))^A$

$H=B^B$

א. מצאו את $|C|$

ב. מצאו את $|F\times H|$

פתרון:

א. $|C|=|P(A)^A|=|P(A)|^{|A|}=(2^a)^a=2^{a\cdot a}=2^a$

ב. $|F\times H|=|A\times P(A)\times B^B|=|A|\times|P(A)|\times|B^B|$

$=|A|\times|P(A)|\times|P(A)^{P(A)}|=a\cdot 2^a\cdot(2^a)^{2^a}=$

$a\cdot 2^a\cdot 2^{a\cdot 2^a}\underset{\max}{=}a\cdot 2^a\cdot 2^{2^a}\underset{\max\{a,2^a,2^{2^a}\}}{=}2^{2^a}$

מבחן 2019

2. (15 נק')

(א) (5 נק') כמה עוצמות שונות יש בקבוצה הבאה: $\{|\mathbb{N}^{\mathbb{R}}|, |P(\mathbb{R}\times\mathbb{R})|, |P(P(\mathbb{Z}))|, |P(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})|\}$.

פתרון: בעזרת אריתמטיקה של עוצמות:

$$|\mathbb{N}^{\mathbb{R}}| = \aleph_0^{\aleph} = 2^{\aleph}$$

$$|P(\mathbb{R}\times\mathbb{R})| = 2^{\aleph\times\aleph} = 2^{\aleph}$$

$$|P(P(\mathbb{Z}))| = 2^{(2^{\aleph_0})} = 2^{\aleph}$$

$$|P(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})| = 2^{(\aleph^{\aleph})} = 2^{(2^{\aleph})}$$

ולכן יש רק 2 עוצמות שונות (כיוון שעבור $a = 2^{\aleph}$ מתקיים כי $a < 2^a$).

הסבר לחישוב הראשון:

$$2^{\aleph} \le \aleph_0^{\aleph} \le (2^{\aleph_0})^{\aleph} = 2^{\aleph_0\cdot\aleph} = 2^{\aleph}$$ ולפי ק.ש.ב.

$2 \le \aleph_0$; $|A| \le |P(A)|$; חוקי חזקות ; $\aleph_0\cdot\aleph = \max\{\aleph_0, \aleph\}$

הסבר לחישוב הרביעי:

$$\aleph^{\aleph} = 2^{\aleph}$$

סמנר ספרי:

$$2^{\aleph} \le \aleph^{\aleph} \le (2^{\aleph})^{\aleph} = 2^{\aleph\cdot\aleph} = 2^{\aleph}$$

$2 \le \aleph$; $|A| \le |P(A)|$; חוקי חזקות ; $\aleph\cdot\aleph = \max\{\aleph, \aleph\}$

מבחן 2019

(ב) (10 נק') מצאו את העוצמה של הקבוצה $A = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f^{-1}[\{1\}] = f^{-1}[\{2\}]\}$ (התשובה צריכה להיות אחת מהבאות: עוצמה סופית, $\aleph_0, \aleph, 2^{\aleph}$).

פתרון: נשים לב כי עבור $f \in A$ מתקיים כי $f^{-1}[\{1\}] = f^{-1}[\{2\}]$. ולכן

$$f^{-1}[\{1\}] = f^{-1}[\{2\}] = f^{-1}[\{1\}] \cap f^{-1}[\{2\}] = f^{-1}[\{1\} \cap \{2\}] = f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$$

חיתוך של קבוצה עם עצמה

הוכח באחד התירגולים הקודמים

כלומר ל $1,2$ אין מקור. ולכן

$$A = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f^{-1}[\{1\}] = f^{-1}[\{2\}]\} = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid Im(f) \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1,2\}\}$$

ולכן נוכל להגדיר פונקציה $F : A \to (\mathbb{N} \setminus \{1,2\})^{\mathbb{N}}$ ע"י $F(f) = f$ שהיא חח"ע ועל ולכן

$$|A| = \left|(\mathbb{N} \setminus \{1,2\})^{\mathbb{N}}\right| = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$$

מבחן 2019

4. (20 נק'.) קבעו והוכיחו עבור כל אחת מהקבוצות הבאות אם עוצמתה $\aleph_0$, $\aleph$, $2^{\aleph}$ סופית או אחרת.

(א) $A = P(P(\mathbb{N}))$

פתרון: מחישוב ישיר $|A| = |P(P(\mathbb{N}))| = 2^{|P(\mathbb{N})|} = 2^{(2^{\aleph_0})} = 2^{\aleph}$.

(ב) הקבוצה B המוגדרת כקבוצת כל הפונקציות החח"ע מ $P(\mathbb{N})$ ל $\mathbb{N}$.

פתרון: נראה כי $B = \emptyset$ ולכן עוצמתה שווה 0. הוכחה: נניח בשלילה כי קיימת $f \in B$ אזי $f : P(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ חח"ע ולכן $\aleph = |P(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{N}| = \aleph_0$. סתירה.

(ג) הקבוצה C המוגדרת כקבוצת כל הפונקציות העל מ $\mathbb{N}$ ל $\{1,2\}$.

פתרון: נראה כי $|C| = \aleph$. נגדיר C' להיות קבוצת כל הפונקציה שאינן על מ $\mathbb{N}$ ל $\{1,2\}$. כלומר $C' = \{f_1, f_2\}$ מעוצמה 2 (כאשר, לכל x טבעי, מוגדר $f_i(x) = i$ $[i = 1,2]$). מהגדרה נובע כי $\{1,2\}^{\mathbb{N}}$ הוא איחוד זר של C ˙ C' ולכן

$$\aleph = 2^{\aleph_0} = \left|\{1,2\}^{\mathbb{N}}\right| = |C \cup C'| = |C| + |C'| = |C| + 2$$

ולכן $|C| = \aleph$ (כי אם C הייתה סופית נקבל כי $|C| + 2$ סופית בסתירה ולכן C אינסופית ואז $|C| = \max\{|C|, 2\} = |C| + 2$).

(ד) $D = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a^2 + b^2 = 1\}$ (מעגל היחידה).

פתרון: מצד אחד $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ולכן $|D| \leq |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = \aleph \cdot \aleph = \aleph$.

מצד שני: נגדיר $f : (0,1) \to D$ ע"י $f(x) = \left(x, \sqrt{1 - x^2}\right) \in D$ שהיא חח"ע ולכן $\aleph = |(0,1)| \leq |D|$.

לפי ק.ש.ב יש שיוויון $|D| = \aleph$.

מבחן 2016

שאלה 3 (23 נקודות)

לכל אחת מהקבוצות הבאות, קבעו האם עוצמתה היא $\aleph_0, \aleph, 2^{\aleph}, 2^{2^{\aleph}}$.
נמקו.

א. A היא קבוצת כל הישרים במישור בעלי שיפוע חיובי.

ב. A היא קבוצת כל הישרים במישור בעלי שיפוע חיובי העוברים דרך הראשית.

ג. $A=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid \forall x\in\mathbb{R}: -1\le f(x)\le 5\}$.

ד. $A=\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}^{\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)}$.

פתרון שאלה 3

סעיף א

$D = \{y=ax+b \mid a\in\mathbb{R}^+,\ b\in\mathbb{R}\}$ = קב' כל הישרים בעלי שיפוע חיובי

$$f: D \to \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$$

$$f(ax+b) = (a,b)$$

מכיוון שפונ' חח"ע ועל.

$$|D| = |\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}| = \aleph\cdot\aleph = \max\{\aleph,\aleph\} = \aleph$$

סעיף ב

$$D' = \{y=a\cdot x,\ a\in\mathbb{R}^+\}$$

$$g: D' \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$g(y=a\cdot x) = a$ כיוון שהפונ' חח"ע+על.

ולכן - $|D'| = |\mathbb{R}^+| = \aleph$

סעיף ג

העוצמה של הקבוצה $A=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid \forall x\in\mathbb{R}: -1\le f(x)\le 5\}$ שווה ל $[-1,5]^{\mathbb{R}}$

בעצם כל פונקציה ניתן להתאים לפונקציה המצומצמת $f:\mathbb{R}\to[-1,5]$

.

$$\aleph^{\aleph} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph} = 2^{\aleph_0\cdot\aleph} = 2^{\aleph}.$$

סעיף ד

$$A=\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}^{\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)}=\left(\aleph_0^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0}\cdot\aleph_0^{\left(\aleph_0^{\aleph_0}\right)}=\aleph_0^{\aleph_0\cdot\aleph_0}\cdot\aleph_0^{\aleph}=\aleph_0^{\aleph_0+\aleph}=\aleph_0^{\aleph}=2^{\aleph}$$

החישובים נעשו על ידי אריתמטיקה של עוצמות

מבחן 2018

הוכיחו/הפריכו: $|A \setminus B| \le |P(A) \setminus P(B)|$

הוכחה

נגדיר פונקציה $f: A \setminus B \to P(A) \setminus P(B)$ ע"י לכל $x \in A \setminus B$ נגדיר $f(x) = \{x\}$.

כיוון ש $x \in A, x \notin B$ ברור כי $\{x\} \in P(A), \{x\} \notin P(B)$ ולכן $\{x\} \in P(A) \setminus P(B)$.

הראנו שהפונקציה מוגדרת היטב, כעת נראה שהיא חח"ע – אם $\{x\} = \{y\}$ ברור ש $x = y$.

בהצלחה!!!