

## תרגיל בית 8 במתמטיקה בדידה 2

### 83-118 סמסטר ב' תשע"ו

8 במאי 2016

1. הערה: בעיקר לסטודנטים של ההרצאה הראשונה: ההתאמה שעשינו מהמיתרים במעגל למחרוזות סוגריים היא אכן חח"ע ועל: נתאים ע"י: כל מיתר  $(i, j)$  כאשר  $i < j$  יגדיר לנו השמת "פותח במקום ה- $i$  ו"סוגר במקום ה- $j$ ". זו התאמה חח"ע ועל, כיון שהרכבה עם ההופכית המוגדרת ע"י: כל מחרוזת תותאם באופן הבא: כל פותח יגדיר לנו פתיחת מיתר, וסוגר יגדיר לנו סגירת המיתר האחרון שנפתח וטרם נסגר. העובדה שניתן להתאים גם מיתרים חותכים למחרוזות מאוזנות לא מפריעה כי הראינו שיש התאמה בין אותם שלא חותכים לבין המחרוזות, וכאן על מיתרים חותכים בכלל לא הוגדרה ההתאמה. תחשבו על זה, כי זה אמור לעזור לכם בחלק מהשאלות.

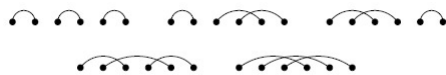
2. כמה סדרות של  $n$  מספרים שלמים  $(a_1, \dots, a_n)$  יש המקיימים:  $1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ , ובנוסף  $a_i \leq i$  לכל  $1 \leq i \leq n$ ?

3. כמה סדרות של  $n$  אחדות (1) ו- $n$  מינוס אחדות (-1) יש, כך שכל הסכומים החלקיים הינם אי-שליליים?

4. א. כמה אפשרויות יש להכניס את האיברים  $\{1, \dots, n\}$  בסדר עולה לתור ולהוציאם ממנו (כלומר, מי שנכנס ראשון יוצא ראשון, וניתן להוציא לפני שכולם נכנסו)?

ב. כמה אפשרויות יש להכניס את האיברים  $\{1, \dots, n\}$  בסדר עולה למחסנית ולהוציאם ממנה (כלומר, מי שנכנס ראשון יוצא אחרון, וניתן להוציא לפני שכולם נכנסו)?

5. נתבונן ב- $2n$  נקודות על ישר. אנו רוצים לחבר זוגות ע"י קשת מעל הנקודות באופן שאין אף קשת ממש מעל קשת אחרת. כמה אפשרויות יש לעשות זאת? דוגמא עבור  $n = 3$ :



איור 1:

6. יהי מצולע  $P$  בן  $n$  צלעות. אלכסון של מצולע  $P$  הוא קו המחבר שני קודקודים של  $P$  ונמצא בחלקו הפנימי. נאמר ששני אלכסונים לא נחתכים אם אין להם נקודה משותפת בחלקו הפנימי של  $P$ . שילוש של מצולע הוא חלוקה שלו למשולשים על ידי קבוצה מקסימלית של אלכסונים לא נחתכים. לדוגמא:



איור 2:

כאשר במשושה מצד ימין מסומן רק אלכסון אחד, ומצד שמאל ובאמצע 2 שילוישים שונים.  
 א. הוכיחו בעזרת אינדוקציה כי כל מצולע משוכלל בן  $n \geq 3$  צלעות ניתן לשילוש ושיש בשילוש  $n - 3$  אלכסונים. מותר להניח שכל אלכסון במצולע נמצא בחלקו הפנימי של המצולע. (ניתן להוכיח גם שכל מצולע ניתן לשילוש).  
 ב. (זו שאלה קצת קשה) יהי  $T_n$  מספר השילוישים של מצולע משוכלל בן  $n$  צלעות. מצאו נוסחת נסיגה עבור  $T_n$  וממנה הסיקו נוסחה מפורשת עבור  $T_n$ . (הניחו ש- $T_2 = 1$ ).