תרגיל בית 7 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשפ"ב

שאלה 1 (חימום)**.** הכינו דגם מנייר של החבורה הדיהדרלית D_4.

שאלה 2. אפשר להעזר בדגם של D_n לבדיקות.

א. מצאו את כל תת־החבורות הלא טריוויאליות של D_4, והוכיחו שכולן אבליות. האם כולן ציקליות?

ב. הוכיחו לכל $m > 1$ כי $Z(D_{2m-1}) = \{\mathrm{id}\}$ ו-$Z(D_{2m}) = \langle\sigma^m\rangle$. רמז: איך נראה איבר כללי בחבורה דיהדרלית?

ג. כתבו את משוואת המחלקות של D_5 מבלי להתאמץ. כלומר חשבו את הגודל של כל מחלקות הצמידות ללא צורך בחישוב ישיר לכל איבר. רמז: הסעיף הקודם עם כך שגודל מחלקת צמידות מחלק את סדר החבורה.

שאלה 3. יהי p ראשוני, ותהי G חבורה מסדר p^3.

א. הוכיחו שניתן ליצור את G עם תת־קבוצה בת שלושה איברים $a, b, c \in G$ (כלומר $G = \langle a, b, c\rangle$). רמז: משפט לגראנז' כמה וכמה פעמים.

ב. בחרו p. תנו דוגמה מפורשת לחבורה G אבלית מסדר p^3 שאפשר ליצור עם שני איברים $a, b \in G$, אבל לא עם איבר אחד.

ג. רשות: הראו שישנה חבורה לא אבלית מסדר p^3 שאפשר ליצור עם שני איברים לפי ההדרכה הבאה: התבוננו בקבוצה (שכבר פגשנו מעל $\mathbb{R}$)

$$H(\mathbb{Z}_p) = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \middle| x, y, z \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

ועל האיברים $b = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), a = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. הראו כי $\left|\left\langle a, aba^{-1}b^{-1}\right\rangle\right| = p^2$, והסיקו מזה ש-$H(\mathbb{Z}_p) = \langle a, b\rangle$.

שאלה 4. תהי G חבורה ותהי $S \subseteq G$ תת־קבוצה לא ריקה. נגדיר את המְרַכֵּז של S ב-G להיות

$$C_G(S) = \{g \in G \,|\, \forall s \in S, gs = sg\}$$

זו הכללה למושג מְרַכֵּז של איבר $s \in G$ שבכיתה סימנו $C_G(s)$.

א. הוכיחו שאם $S \subseteq T \subseteq G$ תת־קבוצות, אז $C_G(T) \subseteq C_G(S)$.

ב. הוכיחו
$$C_G(S)=\bigcap_{s\in S}C_G(s)=\bigcap_{s\in\langle S\rangle}C_G(s)=C_G(\langle S\rangle)$$
והסיקו כי $C_G(S)\leq G$.

ג. תנו דוגמה לחבורה G ותת־קבוצה S כך ש-$|S|\geq 2$ וגם $S\subsetneqq C_G(S)\subsetneqq G$. רמז: אפשר להסתפק ב-$G=S_3$ (אבל לא חייבים!)

ד. תנו דוגמה לחבורה G ותת־קבוצה S כך ש-$|S|\geq 2$ וגם $C_G(S)\subsetneqq S\subsetneqq G$. רמז: אפשר להסתפק ב-$G=S_3$ (אבל לא חייבים!)

שאלה 5. נאמר שפעולה של חבורה G על קבוצה X, כך ש-$|X|>2$, היא 2-טרנזיטיבית אם לכל רביעיית איברים $x_1\neq x_2\in X$ ו-$y_1\neq y_2\in X$ קיים $g\in G$ כך ש-$g*x_1=y_1$ וגם $g*x_2=y_2$.
הערה: השאלה נראית יותר מפחידה ממה שהיא. בעיקר צריך להבין את ההגדרה.

א. הוכיחו שאם G פועלת 2-טרנזיטיבית על X אז היא גם פועלת טרנזיטיבית.

ב. הוכיחו כי G פועלת 2-טרנזיטיבית אם ורק אם G פועלת טרנזיטיבית על הקבוצה $X\times X\setminus\Delta$, כאשר $\Delta=\{(x,x)\,|\,x\in X\}$ והפעולה היא רכיב-רכיב.

ג. הוכיחו כי S_4 פועלת 2-טרנזיטיבית על הקבוצה $\{1,2,3,4\}$.

ד. יהי F שדה, ונניח $|F|>2$. הוכיחו שהחבורה $GL_2(F)$ פועלת טרנזיטיבית על $F^2\setminus\{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\}$, אבל לא פועלת 2-טרנזיטיבית עליה.

שאלה 6. עבור כל אחת מן ההעתקות הבאות קבעו והוכיחו האם היא הומומורפיזם, מונומורפיזם, אפימורפיזם או איזומורפיזם.

א. $f\colon\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}^*$ המוגדרת לפי $f(x)=x^{-3}$.

ב. $f\colon\mathbb{Q}^*\to\mathbb{Q}^*$ המוגדרת לפי $f(x)=x^2$.

ג. $f\colon\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^+$ המוגדרת לפי $f(x)=x^4$ כאשר $\mathbb{R}^+$ זו חבורת המספרים הממשיים החיוביים עם כפל רגיל.

ד. $f\colon S_7\to\mathbb{Z}$ המוגדרת לפי $f(\sigma)=\sigma(1)$.

ה. $f_x\colon G\to G$ המוגדרת לפי $f_x(g)=xgx^{-1}$ כאשר G חבורה ו-$x\in G$ איבר.

ו. $f\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$ המוגדרת לפי $f(k)=([k]\,,[k])$.

ז. $f\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_6$ המוגדרת לפי $f(n)=(n \bmod 3,\, n \bmod 6)$.

שאלה 7. הוכיחו שאם G חבורה נוצרת סופית ויש הומומורפיזם $f:G\to H$ אז $\mathrm{im}(f)$ נוצרת סופית.

שאלה 8. תהי G חבורה. נגדיר $f\colon G\to G$ לפי $f\left(g\right)=g^2$.

א. הוכיחו שהפונקציה f היא הומומורפיזם אם ורק אם G אבלית.

ב. נניח שהחבורה G אבלית וסופית. הוכיחו שהפונקציה f היא איזומורפיזם אם ורק אם הסדר של G הוא אי-זוגי.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה שלחו לנו את הפתרון שלהן.

שאלה 9. כהמשך לתוכנה שמקבלת כקלט רשימת מספרים המייצגת תמורה, הוסיפו לה פונקציה המחשבת את גודל מחלקת הצמידות של תמורה ב-S_n, ופונקציה המחשבת את סדר המְרַכֵּז שלה.

שאלה 10. יהי $\Psi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ אופרטור מקבוצה סדורה חלקית $(\mathcal{L}, \leq)$ לעצמה.

א. הוכיחו שאם Ψ מקיים את שני התנאים:

- לכל $A, B \in \mathcal{L}$, אם $A \leq B$ אז $\Psi(B) \leq \Psi(A)$.
- לכל $A \in \mathcal{L}$ מתקיים $A \leq \Psi^2(A)$.

אז $\Psi = \Psi^3$. כלומר שלכל $A \in \mathcal{L}$ מתקיים $\Psi(\Psi(\Psi(A))) = \Psi(A)$.

ב. הסיקו שלכל תת־חבורה $H \leq G$ מתקיים $C_G(C_G(C_G(H))) = C_G(H)$.

בהצלחה!