

אנליזה מודרנית תש"ף - תרגיל 8

להגשה עד 15.1.20

שאלה 1

תהי סדרת פונקציות רציפות בהחלט בקטע $[a, b]$, כך ש- $f_n \rightarrow f$. נניח שקיים $M > 0$ כך שלכל n מתקיים $|f'_n(x)| \leq M$. האם f רציפה בהחלט ב- $[a, b]$? הוכיחו או הפריכו.

שאלה 2

הוכיחו שאם $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה בהחלט, ו- $F'(x) \leq 0$ כמעט בכל מקום, אז $F(b) \leq F(a)$. האם טענה זו נכונה אם F אינה רציפה בהחלט, אך רציפה ובעלת השתנות חסומה?

שאלה 3 (רשות)

תהי f פונקציה רציפה בהחלט ב- $[0, 1]$. לכל $A \subseteq [0, 1]$ נגדיר $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$. הוכיחו כי אם $m(A) = 0$ אז $m(f(A)) = 0$.

שאלה 4

תהי $E \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה מדידה לבג. הוכיחו כי $m(E) > 0$ אם ורק אם קיימת נקודה $x \in E$ כך שהצפיפות היחסית של E ב- x היא 1, כלומר

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{m(E \cap [x - \varepsilon, x + \varepsilon])}{m([x - \varepsilon, x + \varepsilon])} = 1$$

שאלה 5 (רשות)

תהי $E \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה מדידה לבג, ונניח ש- $E + q = E$ לכל $q \in \mathbb{Q}$. הוכיחו כי $m(E) = 0$ או $m(E^c) = 0$.