פתרון תרגילי בית 6+7 בהסתברות וסטטיסטיקה מתמטית
88-373 סמסטר ב' תשפ"א

הפונקציה האופיינית

תרגיל 1. חשבו את הפונקציה האופיינית של ההתפלגויות הבאות:

א. $X \sim \mathrm{Bin}\left(n,p\right)$.

ב. $X \sim \mathrm{NB}\left(r,p\right)$ (התפלגות בינומית שלילית).

פתרון.

א. נחשב:

$$\varphi_X\left(t\right)=\mathbb{E}\left[e^{itX}\right]=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k\left(1-p\right)^{n-k}e^{itk}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(pe^{it}\right)^k\left(1-p\right)^{n-k}=$$
$$=\left(1-p+pe^{it}\right)^n$$

שימו לב שזה הגיוני, כי אנחנו יודעים שסכום של n משתני $\mathrm{Ber}\left(p\right)$ בלתי-תלויים מתפלג $\mathrm{Bin}\left(n,p\right)$. לכן הפונקציה האופיינית של $\mathrm{Bin}\left(n,p\right)$ אמורה להיות הפונקציה האופיינית של $\mathrm{Ber}\left(p\right)$ מועלית בחזקת n.

ב. אפשר לחשב ישירות, או להשתמש בטריק הבא. התפלגות בינומית שלילית סופרת את כמות ההצלחות בסדרת ניסויי ברנולי עם הסתברות p עד שיש r כישלונות. אם $X \sim \mathrm{NB}\left(r,p\right)$, אז $X=\sum_{i=1}^{r}Y_i$ כשכל $Y_i \sim \mathrm{Geo}\left(1-p\right)$, כשההתפלגות פה היא מעט שונה מזו שלקחנו בתרגול: פה התומך של Y_i הוא $\{0,1,\dots\}$, ופונקציית ההתפלגות היא

$$P\left(Y_i=k\right)=\left(1-p\right)p^k.$$

נחשב את הפונקציה האופיינית של כל Y_i:

$$\varphi_{Y_i}\left(t\right)=\mathbb{E}\left[e^{itY_i}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-p\right)p^ke^{itk}=\left(1-p\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(pe^{it}\right)^k=\frac{1-p}{1-pe^{it}}.$$

לכן

$$\varphi_X\left(t\right)=\left(\frac{1-p}{1-pe^{it}}\right)^r.$$

תרגיל 2. נגדיר משתנה מקרי רציף X על $(0,\infty)$ לפי פונקציית הצפיפות

$$f_X\left(x\right)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\left(\alpha\right)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}$$

כאשר פונקציית גמא מוגדרת לפי

$$.\Gamma\left(\alpha\right)=\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

להתפלגות הזו קוראים **התפלגות גמא** עם פרמטרים $\alpha,\beta>0$, ומסמנים $X\sim\Gamma\left(\alpha,\beta\right)$.
הוכיחו כי $\varphi_X\left(t\right)=\left(1-\frac{\beta}{it}\right)^{-\alpha}$.

פתרון.

$$\begin{aligned}\varphi_X\left(t\right)&=\int_0^{\infty}f_X\left(x\right)e^{itx}\,\mathrm{d}x=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}e^{itx}\,\mathrm{d}x=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-(\beta-it)x}\,\mathrm{d}x=\\&=\left\{u=\left(\beta-it\right)x;\,\mathrm{d}u=\left(\beta-it\right)\,\mathrm{d}x\right\}=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\left(\beta-it\right)^{-1}\int_0^{\infty}\left(\beta-it\right)^{-(\alpha-1)}u^{\alpha-1}e^{-u}\,\mathrm{d}u=\\&=\frac{\beta^{\alpha}\left(\beta-it\right)^{-\alpha}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\Gamma\left(\alpha\right)=\left(1-\frac{\beta}{it}\right)^{-\alpha}\end{aligned}$$

תרגיל 3. יהי X משתנה מקרי שעבורו $\varphi_X\left(t\right)$ גזירה $2n$ פעמים. הוכיחו כי המומנט ה-$2n$-י של X סופי.

(רמז: התבוננו ב-$\varphi_X\left(2h\right)-2\varphi_X\left(0\right)+\varphi_X\left(-2h\right)$.)

הוכחה. ניעזר ברמז. נתחיל מהמקרה $n=1$. נשים לב כי

$$\varphi_X\left(2h\right)-2\varphi_X\left(0\right)+\varphi_X\left(-2h\right)=\mathbb{E}\left[e^{2hiX}-2+2e^{-2hiX}\right]=\mathbb{E}\left[2\cos\left(2hX\right)-2\right]$$

ולכן

$$.\frac{\varphi_X\left(2h\right)-2\varphi_X\left(0\right)+\varphi_X\left(-2h\right)}{4h^2}=\mathbb{E}\left[\frac{\cos\left(2hX\right)-1}{2h^2}\right]$$

הגבול של אגף ימין כאשר $h\to0$ הוא $\varphi_X''\left(0\right)$, שקיים לפי ההנחה. מצד שני,

$$.\lim_{h\to0}\frac{\cos\left(2hX\right)-1}{2h^2}=-X^2$$

ממשפט ההתכנסות הנשלטת נקבל שהמומנט השני קיים ומתקיים $\mathbb{E}\left[X^2\right]=-\varphi_X''\left(0\right)$.
נוכיח את המקרה הכללי באמצעות אינדוקציה. נניח ש-φ_X גזירה $2n+2$ פעמים, ומהנחת האינדוקציה קיים המומנט $\mathbb{E}\left[X^{2n}\right]<\infty$. אבל אז מהחישוב שעשינו בתרגול אנחנו יודעים שמתקיים

$$\varphi_X^{(2n)}\left(t\right)=i^{2n}\mathbb{E}\left[X^{2n}e^{iXt}\right]=\left(-1\right)^n\mathbb{E}\left[X^{2n}e^{iXt}\right]$$

ובדומה לפתרון הקודם נוכל להוכיח ש-$\varphi_X^{(2n)}$ גזירה פעמיים ונקבל את המומנט ה-$(2n+2)$.
□

משפט הגבול המרכזי

תרגיל 4. בכל יום קרול הטרול מטיל שוב ושוב את מטבע המזל שלו עד שהוא מקבל "עץ", ורק אז הוא מתפנה לסידורים האחרים של אותו היום. כידוע, טרולים הם מאוד סבלנים כשזה מגיע להטלות מטבע, ככה שהוא מוכן להמשיך עד שהוא מטיל "עץ" (לא מתחלף היום עד שזה לא קורה), ובסיום הוא רושם לעצמו ביומן כמה פעמים היה צריך להמשיך עד שזה קרה. יום אחד חשד קרול הטרול שחד הגמד החליף לו מימים ימימה את המטבע במטבע לא הוגן. קרול הטרול מחליט לחשב את ממוצע ההטלות שלו X ב-1000 הימים האחרונים, ולהשוות את זה להתפלגות הצפויה. הוא קיבל את התוצאה 1.99.

א. האם קרול הטרול צריך לדאוג? (הוא ידאג אם $P(X \leq 1.99) < 0.1$)

ב. ומה אם היה מדובר בממוצע לאחר 100000 ימים?

פתרון. נסמן על ידי X_i את כמות ההטלות שקרול הטרול היה צריך להטיל ביום ה-i. לפי נתוני השאלה, $X_i \sim \mathrm{Geo}\left(\frac{1}{2}\right)$. אם יש n הטלות, אז $X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. נזכור כי $\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{1/2} = 2$ וכי $\mathrm{Var}(X_i) = \frac{1-1/2}{(1/2)^2} = 2$, לכן לפי משפט הגבול המרכזי ההתפלגות של X היא בקירוב $N\left(2, \frac{2}{n}\right)$. כלומר

$$P(X \leq 1.99) \approx P\left(N\left(2, \frac{2}{n}\right) \leq 1.99\right) = P\left(\sqrt{\frac{2}{n}} \cdot N(0,1) + 2 \leq 1.99\right) = \Phi\left(-0.01\sqrt{\frac{n}{2}}\right).$$

א. אם $n = 1000$ אז

$$P(X \leq 1.99) \approx \Phi\left(-0.01 \cdot \sqrt{500}\right) = 0.4115$$

שזה לא מדאיג בכלל.

ב. אם $n = 100000$ אז

$$P(X \leq 1.99) \approx \Phi\left(-0.01 \cdot \sqrt{50000}\right) = 0.0127$$

שזה מאוד מדאיג.

תרגיל 5. חשבו את הגבול

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{\sqrt{n}}\right) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n .$$

פתרון. יהיו $X_1, X_2, \ldots$ ממבתש"ה עם התפלגות $U[-1,1]$. אז האינטגרל הדרוש הוא

$$\frac{1}{2^n} \int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{\sqrt{n}}\right) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \mathbb{E}\left[\cos\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

נסמן $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_n$. נשים לב שמתקיים

$$\mathbb{E}[X_i] = 0, \qquad \mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{3}.$$

ממשפט הגבול המרכזי, $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{w} N\left(0,\frac{1}{3}\right)$. יהי $Z \sim N\left(0,\frac{1}{3}\right)$. כיוון ש-cos היא פונקציה רציפה וחסומה, נקבל

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\cos\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}\right)\right]=\mathbb{E}\left[\cos\left(Z\right)\right]=\mathbb{E}\left[\frac{e^{iZ}+e^{-iZ}}{2}\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\varphi_Z\left(1\right)+\varphi_Z\left(-1\right)\right)$$

נזכור כי

$$\varphi_{N(\mu,\sigma^2)}\left(t\right)=e^{it\mu-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$$

ולכן הגבול הוא

$$\frac{1}{2}\cdot\left(e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}+e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}\right)=e^{-\frac{1}{6}}$$

תרגיל 6. חשבו את הגבול

$$\lim_{n\to\infty}2^n\cdot\int_{A_n}x_1\cdots x_n\,\mathrm{d}x_1\ldots\,\mathrm{d}x_n$$

כאשר

$$.A_n=\left\{(x_1,\ldots,x_n)\in[0,1]^n\mid 3\left(x_1+\cdots+x_n\right)>2n+\sqrt{n}\right\}$$

(רמז: החלפת משתנים $y_i=x_i^2$.)

פתרון. נלך לפי הרמז. נחליף משתנים $y_i=x_i^2$. התחום החדש שנקבל הוא

$$A_n'=\left\{(y_1,\ldots,y_n)\in[0,1]^n\mid 3\left(y_1^{\frac{1}{2}}+\cdots+y_n^{\frac{1}{2}}\right)>2n+\sqrt{n}\right\}$$

היעקוביאן הוא $2^nx_1\cdots x_n$, לכן האינטגרל יהפוך להיות

$$2^n\cdot\int_{A_n}x_1\cdots x_n\,\mathrm{d}x_1\ldots\,\mathrm{d}x_n=\int_{A_n'}\mathrm{d}y_1\ldots\,\mathrm{d}y_n=P\left(A_n'\right)$$

ביחס למידת לבג הרגילה.

ניקח $Y_1,Y_2,\ldots$ ממבתש"ה עם התפלגות $U\left[0,1\right]$. אז

$$\mathbb{E}\left[Y_i^{\frac{1}{2}}\right]=\int_0^1y^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}y=\left(\frac{2}{3}\cdot y^{\frac{3}{2}}\right)_0^1=\frac{2}{3}$$

וכן

$$\mathrm{Var}\left(Y_i^{-\frac{1}{2}}\right)=\mathbb{E}\left[Y_i\right]-\mathbb{E}\left[Y_i^{\frac{1}{2}}\right]^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}=\sigma^2$$

ולכן נכתוב

$$A'_n=\left\{(y_1,\dots,y_n)\in[0,1]^n \mid \frac{\left(y_1^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}\right)+\cdots+\left(y_n^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}\right)}{\sigma\sqrt{n}}>\frac{1}{3\sigma}\right\}$$

ממשפט הגבול המרכזי,

$$P\left(A'_n\right)=P\left(\frac{\left(Y_1^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}\right)+\cdots+\left(Y_n^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}\right)}{\sigma\sqrt{n}}>\frac{1}{3\sigma}\right)\xrightarrow{\text{CLT}}1-\Phi\left(\frac{1}{3\sigma}\right)=$$

$$=1-\Phi\left(\frac{1}{3\cdot\sqrt{\frac{1}{18}}}\right)=1-\Phi\left(\sqrt{2}\right)$$

תוחלת מותנית

תרגיל 7. מטילים פעמיים מטבע שהסיכוי שלו ליפול על "עץ" הוא p. נסמן על ידי Ω את מרחב המדגם של כל ההטלות האפשריות, ויהי Y המשתנה המקרי המייצג את כמות הפעמים שיצא "עץ".

א. מהי $\sigma\left(Y\right)$?

ב. תהי $\mathcal{F}_1=\left\{\varnothing,\left\{\left(\text{עץ},\text{עץ}\right),\left(\text{עץ},\text{פלי}\right)\right\},\left\{\left(\text{פלי},\text{פלי}\right),\left(\text{פלי},\text{עץ}\right)\right\},\Omega\right\}$ תת-σ-אלגברה. חשבו את התוחלת המותנית $\mathbb{E}\left[Y\mid\mathcal{F}_1\right]$.

ג. ודאו כי $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y\mid\mathcal{F}_1\right]\right]=\mathbb{E}\left[Y\right]$.

פתרון.

א. $\sigma\left(Y\right)$ היא ה-σ-אלגברה המינימלית שביחס אליה Y מדיד. כיוון שהכל בדיד, מספיק לנו להסתכל על המקורות של איברים בודדים בתמונה של Y. האפשרויות הן $0,1,2$, לכן

$$\sigma\left(Y\right)=\sigma\left(\left\{\left\{\left(\text{פלי},\text{פלי}\right)\right\},\left\{\left(\text{פלי},\text{עץ}\right),\left(\text{עץ},\text{פלי}\right)\right\}\left\{\left(\text{עץ},\text{עץ}\right)\right\}\right\}\right).$$

כלומר זו ה-σ-אלגברה המתקבלת מאיחודים סופיים של הקבוצות האלו.

ב. נסמן $Z=\mathbb{E}\left[Y\mid\mathcal{F}_1\right]$, $A=\left\{\left(\text{עץ},\text{עץ}\right),\left(\text{עץ},\text{פלי}\right)\right\}$. נשים לב כי

$$\mathcal{F}_1=\sigma\left(A\right)=\left\{\varnothing,A,A^c,\Omega\right\}.$$

כל משתנה מקרי שהוא $\mathcal{F}_1$-מדיד חייב להיות קבוע על A וקבוע של A^c (לא בהכרח עם אותו ערך); שהרי המקור של כל ערך שלו חייב להיות מדיד. לכן, אם $\omega\in A$ בהכרח נקבל $Z\left(\omega\right)=\mathbb{E}\left[Y\mid A\right]$, ואם $\omega\notin A$ נקבל $Z\left(\omega\right)=\mathbb{E}\left[Y\mid A^c\right]$.
נחשב כל תוחלת מותנית. נשים לב כי $P\left(A\right)=p^2+p\left(1-p\right)=p$, לכן

$$\mathbb{E}\left[Y\mid A\right]=\frac{P\left(\left(\text{עץ},\text{עץ}\right)\right)}{P\left(A\right)}\cdot 2+\frac{P\left(\left(\text{עץ},\text{פלי}\right)\right)}{P\left(A\right)}\cdot 1=\frac{2p^2+p\left(1-p\right)}{p}=1+p$$

$$\mathbb{E}\left[Y\mid A^c\right]=\frac{P\left(\left(\text{פלי},\text{עץ}\right)\right)}{P\left(A^c\right)}\cdot 1+\frac{P\left(\left(\text{פלי},\text{פלי}\right)\right)}{P\left(A^c\right)}\cdot 0=\frac{p\left(1-p\right)}{1-p}=p$$

לכן

$$.Z(\omega)=\begin{cases}1+p, & \omega\in A\\ p, & \omega\notin A\end{cases}$$

ג. לפי ההגדרה,

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y\mid\mathcal{F}_1\right]\right]=\mathbb{E}\left[Z\right]=p\left(1+p\right)+\left(1-p\right)p=p+p^2+p-p^2=2p$$

וכן $\mathbb{E}\left[Y\right]=2p$ כי $Y\sim\mathrm{Bin}\left(2,p\right)$.

תרגיל 8. יהיו $X_1,X_2,\ldots$ ממבתש"ה עם תוחלת סופית, ויהי N משתנה מקרי בעל תוחלת סופית המקבל ערכים ב-$\mathbb{N}$. הוכיחו כי $\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N}X_i\right]=\mathbb{E}\left[N\right]\cdot\mathbb{E}\left[X_1\right]$.

הוכחה. נשים לב כי

$$.\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N}X_i\right]=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N}X_i\mid N\right]\right]=\mathbb{E}\left[N\cdot\mathbb{E}\left[X_1\right]\right]=\mathbb{E}\left[N\right]\cdot\mathbb{E}\left[X_1\right]$$

$\square$

תרגיל 9. יהיו $X,Y\in L^2\left(\Omega,\mathcal{F},P\right)$, ותהי $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F}$ תת-σ-אלגברה. הוכיחו כי

$$.\mathbb{E}\left[X\cdot\mathbb{E}\left[Y\mid\mathcal{G}\right]\right]=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X\mid\mathcal{G}\right]\cdot Y\right]=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X\mid\mathcal{G}\right]\cdot\mathbb{E}\left[Y\mid\mathcal{G}\right]\right]$$

הוכחה. בגלל הסימטריה מספיק להוכיח רק

$$.\mathbb{E}\left[X\cdot\mathbb{E}\left[Y\mid\mathcal{G}\right]\right]=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X\mid\mathcal{G}\right]\cdot\mathbb{E}\left[Y\mid\mathcal{G}\right]\right]$$

נזכור כי $\mathbb{E}\left[Y\mid\mathcal{G}\right]$ הוא משתנה מקרי $\mathcal{G}$-מדיד, ולכן מתכונת TOWIK ומגדל התוחלות

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X\mid\mathcal{G}\right]\cdot\mathbb{E}\left[Y\mid\mathcal{G}\right]\right]=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X\cdot\mathbb{E}\left[Y\mid\mathcal{G}\right]\mid\mathcal{G}\right]\right]=\mathbb{E}\left[X\cdot\mathbb{E}\left[Y\mid\mathcal{G}\right]\right]$$

כנדרש. $\square$

בהצלחה!