בשביל למצוא את מקדמי הפולינום ממעלה עד $n$ שעובר דרך $n+1$ נקודות, צריך לפתור

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \vec{a} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

מתי יש לזה פתרון? כאשר הדטרמיננטה שונה מאפס. צ"ל $v_n = \prod_{0\leq j<i\leq n} (x_i - x_j)$

$$v_n = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x_0 - x_n & x_0^2 - x_n^2 & \cdots & x_0^n - x_n^n \\ 0 & x_1 - x_n & x_1^2 - x_1^2 & \cdots & x_1^n - x_n^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_{n-1} - x_n & x_{n-1}^2 - x_{n-1}^2 - x_n^2 & \cdots & x_{n-1}^n - x_n^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \dots$$

נפתח לפי מינור, וישאר לנו המינור(כל השאר מתאפסים)

$$\dots = (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} x_0 - x_n & x_0^2 - x_n^2 & \cdots & x_0^n - x_n^n \\ x_1 - x_n & x_1^2 - x_1^2 & \cdots & x_1^n - x_n^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1} - x_n & x_{n-1}^2 - x_{n-1}^2 - x_n^2 & \cdots & x_{n-1}^n - x_n^n \end{vmatrix} = \dots$$

נמשיך לפתח מינורים. נשתמש בזהות $a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=0}^{n-1}\left(a^i b^{n-1-i}\right)$:

$$= (-1)^{n+2} \prod_{i=0}^{n-1} (x_i - x_n) \begin{vmatrix} 1 & x_0 + x_n & \cdots & \sum_{i=0}^{n-1}\left(x_0^i x_n^{n-i-1}\right) \\ 1 & x_1 + x_n & \cdots & \sum_{i=0}^{n-1}\left(x_1^i x_n^{n-i-1}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} + x_n & \cdots & \sum_{i=0}^{n-1}\left(x_{n-1}^i x_n^{n-i-1}\right) \end{vmatrix} = \dots$$

נרוץ על העמודות מהשנייה על הסוף ולכל איבר נבצע $a_{ki} \leftarrow a_{kj} - x_n \cdot a_{k,j-1}$, כלומר

$$a_{ki} \leftarrow \sum_{i=0}^{j-1}\left(x_k^i x_n^{j-1-i}\right) - x_n \sum_{i=0}^{j-2}\left(x_k^i x_n^{j-2-i}\right) =$$

$$= \cancel{\sum_{i=0}^{j-2}\left(x_k^i x_n^{j-1-i}\right)} + x_k^{j-1} - \cancel{\sum_{i=0}^{j-2}\left(x_k^i x_n^{j-1-i}\right)}$$

ולכן נקבל ש

$$v_n=(-1)^{n+2}\prod_{i=0}^{n-1}(x_i-x_n)\begin{vmatrix}1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1}\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1}\end{vmatrix}$$

כעת, נוכיח באינדוקציה שזה לא מתאפס:

בסיס: $n=1$, $v_1=\begin{vmatrix}1 & x_0\\ 1 & x_1\end{vmatrix}=x_1-x_0$.

הנחה: נניח נכונות הטענה עבור $n-1$.

צעד:

$$v_n=\prod_{i=0}^{n-1}(x_n-x_i)\cdot\prod_{0\le j<i\le n-1}(x_i-x_j)=\prod_{0\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

# שיטת Lagrange

$$A=J$$

$n+1$ נקודות דגימה, $n+1$ פונקציות: $f_0(x),f_1(x),\dots f_n(x)$. נגדיר:

$$l_i(x)\quad\prod_{\substack{i=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\qquad P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}y_il_i(x)$$

## דוגמה

עבור הנקודות $(0,1),(1,1),(2,4)$:

$$(0,1)\qquad l_0(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}$$

$$(1,1)\qquad l_1(x)=\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}$$

$$(2,4)\qquad l_2(x)=\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}$$

$$P_2(x) = 1 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{2} + 1 \cdot \frac{x(x-2)}{-1} + 4 \cdot \frac{x(x-1)}{2}$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$$

### תרגיל

הוכיחו $\sum\limits_{i=0}^{n} l_i'(x) = 0$

#### פתרון

$$\sum_{i=0}^{n} l_i'(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} 1 \cdot l_i(x)\right)' = \ldots$$

אבל $\sum_{i=0}^{n} 1 \cdot l_i(x)$, לפי הנוסחה, עובר דרך הנקודות $(x_0,1),(x_1,1),\ldots$ ־ ולכן הוא שווה זהותית לאחד, ו

$$\cdots = (\mathrm{const})' = 0$$

### הבעיה בשיטת לגרנז'

אם מוסיפים לנו עוד דגימות ־ אי אפשר להוסיף את זה לחישוב קיים. נראה שיטה שמטפלת בזה.

# שיטת ההפרשים המחולקים של ניוטור

נתונות $n+1$ נקודות דגימה.

$$\Phi_i(x) = \prod_{j<i} (x - x_j) \qquad P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \Phi_i(x)$$

מתקיים

$$\Phi_j(x_i) = \begin{cases} 0 & i < j \\ c_{ij} \neq 0 & i \geq j \end{cases}$$

## הגדרה - הפרש מחולק

- עבור נקודה 1: $f\left[x_i\right]=f\left(x_i\right)$
- עבור 2 נקודות: $f\left[x_i,x_{i+1}\right]=\dfrac{f\left[x_{i+1}\right]-f\left[x_i\right]}{x_{i+1}-x_i}$
- עבור $k+1$ נקודות:

$$f\left[x_i,x_{i+1},\dots x_{i+k-1},x_{i+k}\right]=\frac{f\left[x_{i+1},\dots x_{i+k}\right]-f\left[x_i,\dots x_{i+k-1}\right]}{x_{i+k}-x_i}$$

$$a_i=f\left[x_0,\dots x_i\right]$$

## דוגמה

עבור הנקודות $(3,62)\,,(2,27)\,,(0,5)\,,(-1,6)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | $6$ | $\frac{5-6}{0+1}=-1$ | $\frac{11+1}{2+1}=4$ | $\frac{8-4}{3+1}=1$ |
| $0$ | $5$ | $\frac{27-5}{2-0}=11$ | $\frac{35-11}{3-0}=8$ | |
| $2$ | $27$ | $\frac{62-27}{3-2}=35$ | | |
| $3$ | $62$ | | | |

נשים לב שמשתמשים כאן בתכנות דינאמי - כל חישוב מבוסס על הקודמים.

$$\Phi_0\left(x\right)=1$$

$$\Phi_1\left(x\right)=\left(x+1\right)$$

$$\Phi_2\left(x\right)=\left(x+1\right)\left(x-0\right)$$

$$\Phi_3\left(x\right)=\left(x+1\right)\left(x-0\right)\left(x-2\right)$$

## עוד דוגמה

$$\left(0,0\right),\left(1,1\right),\left(2,4\right)$$

$$
\begin{array}{c|c|c|c}
0 & 0 & & \\
\hline
1 & 1 & \frac{1-0}{1-0} = 1 & \\
\hline
 & & & \frac{3-1}{2-0} = 1 \\
2 & 4 & \frac{4-1}{2-1} = 3 &
\end{array}
$$

$$\Phi_1\left(x\right) = x \qquad \Phi_2\left(x\right) = x \cdot \left(x-1\right)$$

$$P_2\left(x\right) = x + x\left(x-1\right) = x + 2^2 - x = x^2$$

נניח שנותנים לנו נקודה נוספת: $(5,145)$. אז אפשר לעשות:

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c}
0 & 0 & \frac{1-0}{1-0} = 1 & & \\
\hline
1 & 1 & & \frac{3-1}{2-0} = 1 & \\
\hline
2 & 4 & \frac{4-1}{2-1} = 3 & & \frac{11-1}{5-0} = 2 \\
\hline
5 & 145 & \frac{145-4}{5-2} = 47 & \frac{47-3}{5-1} = 11 &
\end{array}
$$

$$\Phi_3\left(x\right) = x^2 + 2x\left(x-1\right)\left(x-2\right) = 2x^3 - 5x^2 + 4x$$