

קורס : 88-231-01,05

מרצה: ש. הורוביץ

י"ב אלול תשע"ב

## מבחן בפונקציות מרוכבות מועד ב'

ענו על כל השאלות הבאות. ניקוד כל שאלה 18 נקודות.  
כל חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט.  
משך הבחינה: שלוש שעות.

1. א. הוכיחו שלכל  $z$  ממשי,  $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$ .  
ב. מצאו את כל המספרים המרוכבים  $z$ , כך ש-  $\cos z = \cos \bar{z}$ .

2. תהי  $f(z)$  פונקציה שלימה כך שלכל  $z$  מרוכב,  $f(z) \neq 0$ . הוכיחו של- $f(z)$  קיים "לוגריתם אנליטי". ז.א הוכיחו שקיימת פונקציה שלימה  $g(z)$  כך שלכל  $z$  מרוכב

$$f(z) = e^{g(z)}. \quad (\text{הדרכה: לפי הנתון } \frac{f'(z)}{f(z)} \text{ פונקציה שלימה)}$$

3. חשבו  $\int_{\gamma} \frac{\bar{z}+1}{z} dz$  כאשר  $\gamma$  מורכבת מקשת המעגל  $|z|=2$  מ- $2i$  עד  $2i$ , הקטע הישר

מ-

$2i$  עד  $i$ , קשת מעגל היחידה מ- $i$  עד  $1$ , והקטע הישר מ- $1$  עד  $2i$ .

$$4. \text{..חשבו: } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4x + 8} dx$$

5. מצצאו את הטבעת הפתוחה המקסימלית שבה הטור הבא מתכנס.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{(z-5)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{20^n} (z-5)^{2n}$$

6. כמה קטבים, כולל ריבוי, יש לפונקציה  $\frac{\sin z}{z^7 - 4z^3 + 2z}$  בעיגול היחידה  $|z| < 1$ ?

הצדיקו את תשובתכם.

בהצלחה!