

בחינה בקורס תורת החבורות (88218) – מועד א' תשפ"ב

מרצים: אנדריי רזניקוב ומיכאל שיין.
מתרגלים: תומר באואר וגיא בלשר.
משך הבחינה: שעתיים וחצי.
אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.

הנחיות

- א. יש לענות על כל השאלות.
השתמשו במחברת הבחינה לטיוטה, ולאחר שמצאתם פתרון מספק, כתבו אותו בצורה מסודרת בגוף הבחינה, במקום הפנוי המצוי לאחר השאלה. מחברות הבחינה לא תיבדקנה.
אם מוכרחים, אפשר להמשיך תשובה בגב אותו דף. לא תתקבל תשובה המשתרעת על פני יותר משני עמודים.
- ב. משקל כל שאלה הוא 25 נקודות.

שאלות המבחן מופיעות בעמודים הבאים.

הבהרה. גם אם הדבר לא מצויין במפורש בשאלות, עליך לנמק את כל תשובותיך.

בהצלחה!

שאלה 1

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- א. יהי $n \geq 3$. הפעולה הטבעית של A_n על הקבוצה $\{1, 2, \dots, n\}$ הינה טרנזיטיבית.
- ב. תהי G חבורה ותהי $H \trianglelefteq G$ תת-חבורה נורמלית. אזי קיים מונומורפיזם $f : G/H \rightarrow G$.

תשובה:

שאלה 2

תהי G חבורה בעלת סדר $616 = 2^3 \cdot 7 \cdot 11$. הוכיחו שהיא לא פשוטה.

תשובה:

שאלה 3

יהי p ראשוני, ותהי G חבורה בעלת סדר p^{5782} . נניח כי G פועלת על הקבוצה A .
א. הוכיחו שאם $|A| < p$ אזי הפעולה הזאת הינה בהכרח הפעולה הטריוויאלית, כלומר $g * a = a$ לכל $g \in G$ ולכל $a \in A$.

ב. הביאו דוגמה לכך שאם $|G| = p^{5782}$ ואילו $|A| = p$, אזי הפעולה לא בהכרח טריוויאלית.

תשובה:

שאלה 4

א. כמה הומומורפיזמים $f : \mathbb{Z}_{24} \rightarrow S_5$ יש?

ב. תהי G חבורה ותהיינה $H, K \leq G$ תת-חבורות נורמליות כך ש- $H \cap K = \{e\}$. הוכיחו כי G איזומורפית לתת-חבורה של $G/H \times G/K$.

תשובה: