אינפי 2 לתיכוניסטים־תרגול 1

21 במרץ 2017

הגדרת הנגזרת

נגזרת באופן אינטואיטיבי מודדת את השיפוע של הפונקציה בנקודה. שיפוע של קו ישר מוגדר ע"י המרחק בציר ה־y חלקי המרחק בציר ה־x. נביט בקו $y = mx + b$ אזי שיפוע שלו הוא:

$$m = \frac{mx_1+b-(mx_2+b)}{x_1-x_2} = \frac{y(x_1)-y(x_2)}{x_1-x_2}.$$

אם כך, נגדיר שיפוע של פונקציה כללית, לפי גבול שיפועים של קווים ישרים. לכל נקודה בסביבת x_0 נמדוד את השיפוע, ב־x_0נגזרת של פונקציה $f(x)$ מוגדרת להיות גבול של השיפועים לעיל כאשר הנקודות מתקרבות ל־x_0.

הגדרה (נגזרת של פונקציה בנקודה)

תהי f פונקציה שמוגדרת בסביבת הנקודה x_0. אזי הפונקציה גזירה בנקודה x_0 אם הגבול הבא קיים וסופי:

$$f'(x_0) = lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

הגדרת הנגזרת שקולה היא:

$$f'(x_0) = lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$$

דוגמה:

נגזור את הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ בנקודה כלשהיא $x > 0$ לפי ההגדרה:

$$f'(x) = lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{x+t}-\sqrt{x}}{t} = lim_{t\to 0}\frac{x+t-x}{t\left(\sqrt{x+t}+\sqrt{x}\right)} = lim_{t\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+t}+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

טענה:

אם פונקציה גזירה בנקודה x_0 אזי היא רציפה שם.

הגדרה:

תהי $y = f(x)$ פונקציה גזירה בכל נקודה של הקטע (a,b) (כולל את האפשרות $a = -\infty$ או $b = \infty$) . אזי הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x_0) = f^{'}(x_0)$ לכל נקודה $a < x_0 < b$, נקראת הפונקציה נגזרת של $f(x)$ בקטע (a,b), או בקצרה הנגזרת של $f(x)$.

לדוגמה:

$f(x) = sin(x)$ היא פונקציה גזירה בכל נקודה $x \in \mathbb{R}$, פונקצית הנגזרת שלה היא $f^{'}(x) = cos(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

משפט (נגזרת של הרכבה של שתי פונקציות)

$$(f(g))^{'} = f^{'}(g) \cdot g^{'}$$

תרגיל

חשבו את הנגזרות של הפונקציות הבאות:

א) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

פתרון:

זו הרכבה של שתי פונקציות: $g(x) = \sqrt{x}$ על $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ולכן נשתמש בנוסחה לנגזרת של הרכבה של שתי פונקציות:

$$\left(\sqrt{h(x)}\right)^{'} = \frac{1}{2\sqrt{h(x)}} \cdot h^{'}(x) \text{ , } h^{'}(x) = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

ולכן הנגזרת של פונקציה היא:

$$-\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \cdot \frac{2}{(x-1)^2}$$

ב) $2^{x^e} \cdot e^{x^x}$

פתרון:

$$(*) \ \left(2^{x^e} \cdot e^{x^x}\right)^{'} = \left(2^{x^e}\right)^{'} \cdot e^{x^x} + 2^{x^e} \cdot \left(e^{x^x}\right)^{'}$$

$$\left(2^{x^e}\right)^{'} = \left(e^{x^e \cdot log2}\right)^{'} = e \cdot x^{e-1} log2 \cdot e^{x^e \cdot log2} = e \cdot x^{e-1} log2 \cdot 2^{x^e}$$

$$\left(e^{x^x}\right)^{'} = (x^x)^{'} \cdot e^{x^x} = \left(e^{xln(x)}\right)^{'} \cdot e^{x^x} = (xln(x))^{'} \cdot x^x \cdot e^{x^x} = (ln(x)+1) \cdot x^x \cdot e^{x^x}$$

נציב את הכל ב־$(*)$ בנקבל את הדרוש.

ג) חשבו את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = x^{sin(x)}$.

פתרון:

$$f^{'}(x) = \left(x^{sin(x)}\right)^{'} = \left(e^{sin(x) \cdot ln(x)}\right)^{'} = e^{sin(x) \cdot ln(x)} \cdot \left(cos(x) \cdot ln(x) + \frac{sin(x)}{x}\right)$$

משפט (נגזרת של פונקציה הפוכה)

תהי $y=f\left(x\right)$ פונקציה הפיכה ורציפה בסביבת הנקודה x_0. אם $f\left(x\right)$ גזירה בנקודה x_0 ואם $f^{'}\left(x_0\right)\neq0$, אזי גם הפונקציה ההופכית שלה $f^{-1}\left(y\right)=x$ גזירה בנקודה $y_0=f\left(x_0\right)$ ומתקיים

$$\left(f^{-1}\right)^{'}\left(y_0\right)=\frac{1}{f^{'}\left(x_0\right)}$$

דוגמה:

נגזור את הפונקציה $g\left(y\right)=arcsin\left(y\right)$ מתקיים:

$$arcsin^{'}\left(y_0\right)=\frac{1}{sin^{'}\left(x_0\right)}=\frac{1}{cos\left(x_0\right)}=\frac{1}{\sqrt{1-sin^2\left(x_0\right)}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$sin\left(x\right):\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\rightarrow\left[-1,1\right]$ חח"ע ועל , ובתחום $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ה־cos הוא חיובי.

תרגיל:

תהי f מוגדרת בסביבת 0 אך לא מנקודה 0 עצמה. נניח שהגבול $lim_{x\rightarrow0}\frac{f(x)}{x}$ קיים ושווה ל־L.

הוכיחו:

א) אי הרציפות באפס היא סליקה.

ב) הפונקציה המתקבלת ב־f ע"י סילוק אי הרציפות באפס, היא פונקציה גזירה באפס. חשבו את נגזרתה שם.

פתרון:

א) $lim_{x\rightarrow0}f\left(x\right)=lim_{x\rightarrow0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=lim_{x\rightarrow0}L\cdot x=0$

ב) לאחר סילוק נק' אי רציפות נקבל את הפונקציה הבאה:

$$g\left(x\right)=\begin{cases}f\left(x\right) & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

מתקיים:

$$lim_{t\rightarrow0}\frac{g(0+t)-g(0)}{t}=lim_{t\rightarrow0}\frac{g(t)-g(0)}{t}=lim_{t\rightarrow0}\frac{f(t)}{t}=L$$

תרגיל:

תהי
$$f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{ln\left(1+x^2\right)}{ax} & x\neq0\\ b & x=0\end{cases}$$

מצא את הקבועים a,b אם נתון $f^{'}\left(0\right)=2$

פתרון:

נחשב את הנגזרת של f לפי ההגדרה בנקודה $x=0$:

לפי הגדרת הנגזרת לכל $b\neq 0$ נקבל :

$$f^{'}\left(x\right)=lim_{x\to 0}\frac{\frac{ln\left(1+x^{2}\right)}{ax}-b}{x}=lim_{x\to 0}\frac{\frac{ln\left(1+x^{2}\right)}{ax^{2}}\cdot x-b}{x}=lim_{x\to 0}\frac{0-b}{x}$$

הגבול כאן לא קיים, כלומר לכל $b\neq 0$ הפונקציה לא גזירה.

אבל נתון ש- $f^{'}\left(0\right)=2$ ולכן $b=0$

$$f^{'}\left(0\right)=lim_{x\to 0}\frac{\frac{ln\left(1+x^{2}\right)}{ax}}{x}=lim_{x\to 0}\frac{ln\left(1+x^{2}\right)}{ax^{2}}=\frac{1}{a}=2$$

ולכן $a=\frac{1}{2}$. לסיכום קיבלנו $a=\frac{1}{2}$, $b=0$.

הגדרה:

אפשר להגדיר נגזרת מימין ומשאל בצורה הבאה:

1) נגזרת מימין: $f_{+}^{'}\left(a\right)=lim_{t\to 0^{+}}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}$

2) נגזרת משמאל: $f_{-}^{'}\left(a\right)=lim_{t\to 0^{-}}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}$

טענה:

נגזרת קיימת אם ורק אם הנגזרת מימין ומשמאל קיימות ושוות.

תרגיל:

ציינו לאילו ערכי x הנגזרת קיימת וחשבו את ערכי הנגזרת שם עבור פונקציה:

$$f\left(x\right)=\left|x\right|\cdot\left|5-x\right|$$

פתרון:

למעשה הפונקציה שלנו היא:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}x^{2}-5x & x\leq 0\\ 5x-x^{2} & 0\leq x\leq 5\\ x^{2}-5x & x\geq 5\end{cases}$$

$$\forall 0<x<5:f^{'}\left(x\right)=5-2x$$

$$\forall x>5:f^{'}\left(x\right)=2x-5$$

$$\forall x<0:2x-5$$

נבדוק נגזרת בנקודה $x=0$:

$$lim_{t\to 0^{+}}\frac{f(0+t)-f(0)}{t}=lim_{t\to 0^{+}}\frac{5t-t^{2}-0}{t}=5$$

$$lim_{t\to 0^{-}}\frac{t^{2}-5t}{t}=lim_{t\to 0^{-}}\left(h-5\right)=-5$$

ולכן היא אינה גזירה בנקודה אפס, באותו אופן היא אינה גזירה בנקודה 5.

שימו לב: f כן רציפה בכל x.

משפט:

אם נגזרת של f אי שלילית בקטע מסויים, אזי f מונוטונית לא יורדת בו. באופן דומה, אם הנגזרת אי חיובית, אזי הפונקציה מונוטונית לא עולה.

תרגיל (ממבחן של ארז שיינר)

(אין קשר בין הסעיפים)

א) תהי פונקציה דירכלה

$$D(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

תהי f פונקציה כלשהיא המקיימת לכל $x \in \mathbb{R}$ כי $f(x) = f(D(x))$. הוכיחו כי f קבועה.

ב) תהיינה f, g גזירות ב־$[0, \infty)$ כך ש $f(0) = g(0)$ ולכל $x \in [0, \infty)$ מתקיים כי $f'(x) > g'(x)$. הוכיחו כי לכל $x \in (0, \infty)$ מתקיים $f > g$.

פתרון:

נשים לב ש־f מקבלת לכל היותר 2 ערכים לכל היותר:

אם $x \in \mathbb{Q}$ אזי $f(x) = f(D(x)) = f(0)$

אם $x \notin \mathbb{Q}$ אזי $f(x) = f(D(x)) = f(1)$

נראה שבהכרח $f(0) = f(1)$:

משום ש־$0 \in \mathbb{Q}$ נקבל $f(0) = f(D(0)) = f(0)$

משום ש־$1 \in \mathbb{Q}$ נקבל $f(1) = f(D(1)) = f(0)$

ולכן לכל $x \in \mathbb{R}$ נקבל $f(0) = f(1) = f(x)$ ולכן f היא קבועה כמו שרצינו.

ב) נגדיר פונקציה: $h(x) = f(x) - g(x)$.

לפי הנתון $h(0) = f(0) - g(0) = 0$.

f, g גזירות ב־$[0, \infty)$ ולכן h גזירה שם ומתקיים

$h'(x) = f'(x) - g'(x) > 0$ לפי הנתון, ולכן לפי המשפט הקודם $h(x)$ היא פונקציה עולה ממש ב־$[0, \infty)$ ולכן היא מקבלת את המינימום שלה ב־$x = 0$, אבל $h(0) = 0$ ולכן $h(x) > 0$ לכל $x \in (0, \infty)$ מה שגורר

$f > g$ ב־$(0, \infty)$.

תרגיל:

תהיינה g,h גזירות ב־$x=0$ ונביט בפונקציה:

$$f\left(x\right)=\begin{cases} g\left(x\right) & x\geq0\\ \\ h\left(x\right) & x<0 \end{cases}$$

א) הוכיחו: f גזירה ב־$x=0$ אם ורק אם $g\left(0\right)=h\left(0\right)$ וגם $h^{'}\left(0\right)=g^{'}\left(0\right)$.

ב) הוכיחו או הפריכו: $f\left(x\right)$ רציפה ב $x=0$ אם ורק אם $f\left(x^{2}\right)$ גזירה ב־$x=0$.

פתרון:

א) $\Leftarrow$: נראה רציפות: f רציפה ב־$x=0$ אם ורק אם היא מוגדרת שם ומתקיים

$$lim_{x\rightarrow0^{-}}f\left(x\right)=lim_{x\rightarrow0^{+}}f\left(x\right)=f\left(0\right)$$

אבל לפי הגדרה של f מקבלים:

$$lim_{x\rightarrow0^{-}}h\left(x\right)=lim_{x\rightarrow0^{+}}g\left(x\right)$$

לפי הנתון f,g גזירות ב־$x=0$ ובפרט רציפות שם ולכן מתקיים :

$$h\ \left(0\right)=lim_{x\rightarrow0^{-}}h\left(x\right)=lim_{x\rightarrow0^{+}}g\left(x\right)=g\left(0\right)$$

נראה גזירות: f גזירה ב־$x=0$ אם ורק אם

$$f_{+}^{'}\left(0\right)=lim_{t\rightarrow0^{+}}\frac{f(0+t)-f(0)}{t}=lim_{t\rightarrow0^{+}}\frac{f(0+t)-f(0)}{t}=f_{-}^{'}\left(0\right)$$

אבל לפי ההגדרה של f מקבלים:

$$f_{+}^{'}\left(0\right)=g_{+}^{'}\left(0\right)=lim_{t\rightarrow0^{+}}\frac{g(0+t)-g(0)}{t}=lim_{t\rightarrow0^{-}}\frac{h(0+t)-h(0)}{t}=h_{-}^{'}\left(0\right)=f_{-}^{'}\left(0\right)$$

אבל h,g גזירות בנקודה $x=0$ לפי הנתון ולכן $h'\left(0\right)=g'\left(0\right)$.

$\Rightarrow$: נראה שהנגזרות מימין ומשמאל קיימות ושוות, ולכן הנגזרת קיימת:

$$f'_{-}(0)=\lim_{t\rightarrow0^{-}}\frac{f(t)-f(0)}{t}=\lim_{t\rightarrow0^{-}}\frac{h(t)-g(0)}{t}=\{g(0)=h(0)\}=\lim_{t\rightarrow0^{-}}\frac{h(t)-h(0)}{t}h'_{-}(0)=$$
$$h'(0)=g'(0)=g'_{+}(0)=\lim_{t\rightarrow0^{+}}\frac{g(t)-g(0)}{t}=\lim_{t\rightarrow0^{+}}\frac{f(t)-f(0)}{t}=f'_{+}(0)$$

ב) הוכחה:

הכיוון הקל($\Rightarrow$) : אם $f\left(x^{2}\right)$ גזירה בנקודה $x=0$ אזי לפי סעיף א' $h\left(0^{2}\right)=h\left(0\right)=g\left(0\right)=g\left(0^{2}\right)$ ולכן f רציפה ב־$x=0$.

כיוון ($\Leftarrow$): נניח ש־f רציפה ב־$x=0$ ונוכיח ש־$f\left(x^{2}\right)$ גזירה שם.

נשתמש בסעיף א' של שאלה: נרצה להוכיח ש־$g\left(0^{2}\right)=h\left(0^{2}\right)$ וגם $h^{'}\left(0^{2}\right)=g^{'}\left(0^{2}\right)$

השוויון הראשון מתקבל מכך ש לנו ש־ f רציפה באפס, ולכן $h(0^2) = h\left(0\right) = g\left(0\right) =$ $.g(0^2)$

לגבי השיוויון השני: $h^{'}\left(x^2\right) = 2x \cdot h^{'}\left(x^2\right)$ ולכן $h^{'}\left(0^2\right) = 0$

באותו אופן נראה ש־$0 = g^{'}\left(0^2\right)$ ולכן קיבלנו ש־$0 = g^{'}\left(0^2\right) = h^{'}\left(0^2\right)$ ולכן לפי סעיף א' $f\left(x^2\right)$ גזירה בנקודה $x = 0$.