

תרגיל בית 5 אינפי 3

1. תהי $E \subseteq \mathbb{R}^2$ קבוצה קומפקטית. פונקציה $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת על ידי

$$f(x, y) = x^2 + \cos^2\left(e^{\frac{x}{y}}\right)$$

(מן הסתם נקודות בהן $y = 0$ לא נמצאות ב E) הוכיחו כי קיים $0 < M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $(x, y) \in E$ מתקיים $M \leq f(x, y)$.

2. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: תהי $f(x, y)$ פונקציה המוגדרת על תחום D , רציפה במ"ש לפי x (כלומר לכל y' הפונקציה $g(x) = f(x, y')$ רציפה במ"ש) ורציפה במ"ש לפי y (כלומר לכל x' הפונקציה $h(y) = f(x', y)$ רציפה במידה שווה). אזי $f(x, y)$ רציפה ב D .

3. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: תהי $f(x, y)$ פונקציה המוגדרת על תחום $D \subseteq \mathbb{R}^2$, רציפה לפי x (כלומר לכל y' הפונקציה $g(x) = f(x, y')$ רציפה) וכן קיים M כך שלכל x' מתקיים $\|f(x', y_1) - f(x', y_2)\| \leq M|y_1 - y_2|$ אזי $f(x, y)$ רציפה ב D .

4. האם הפונקציה $f(x, y) = \cos \frac{1}{1-x^2-y^2}$ רציפה במידה שווה על התחומים הבאים?

(א)

$$D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

(ב)

$$D_2 = \{(x, y) \mid 3 < x^2 + y^2 < 4\}$$

5. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציות הבאות בכל נקודה בה הן מוגדרות

$$f(x, y) = x^3 + 3y^2 - \frac{x}{y} \quad (\text{א})$$

$$f(x, y) = e^{\cos(xy)} \quad (\text{ב})$$

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{ג})$$

$$f(x, y, z) = \ln(x^3 + y^3 - z^3) \quad (\text{ד})$$

6. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

האם הן רציפות?