1. מי מהבאים הוא ה"ל:

(א) הפונקציה $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+2y-z \\ z+2y-x \end{pmatrix}$

פתרון: זאת העתקה לינארית, כי אפשר לראות שההעתקה הזאת מוגדרת ע"י כפל במטריצה. כלומר,

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(ב) העתקת $T:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_{n+2}[x]$ המוגדרת $T(p(x))=x\cdot p(x)$

פתרון: כן. בשביל להוכיח שT היא העתקה לינארית, צריך להראות שמתקיים:

$$\forall p,q\in\mathbb{R}_n[x],\alpha\in\mathbb{R},T(p+\alpha q)=T(p)+\alpha T(q)$$

$$T(p+\alpha q)=x(p+\alpha q)=xp+\alpha xq=T(p)+\alpha T(q)$$

(ג) $T:\mathbb{F}^{n\times n}\to\mathbb{F}$ המוגדרת $T(A)=tr(A)$

פתרון: כן. צריך להוכיח שלכל $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ולכן $\alpha\in\mathbb{F}$ מתקיים:

$$T(A+\alpha B)=T(A)+\alpha T(B)$$

$$T(A+\alpha B)=tr(A+\alpha B)=tr(A)+tr(\alpha B)=tr(A)+\alpha tr(B)=$$

$$T(A)+\alpha T(B)$$

(ד) $T:\mathbb{F}^{m\times n}\to\mathbb{F}^{n\times m}$ המוגדרת $T(A)=A^t$

פתרון:כן. הוכחה:

$$T(A+\alpha B)=(A+\alpha B)^t=A^t+(\alpha B)^t=A^t+\alpha B^t=$$

$$T(A)+\alpha T(B)$$

(ה) $T:\mathbb{F}^{n\times n}\to\mathbb{F}^{n\times n}$ המוגדרת $T(A)=A+I$

פתרון: לא. למשל, היא לא שומרת על חיבור.

$$T(A+B)=A+B+I$$

$$T(A)+T(B)=A+I+B+I=A+B+2I$$

דרך נוספת: היא לא שומרת על כפל בסקלר.

$$T(\alpha A) = \alpha A + I$$

$$\alpha T(A) = \alpha(A + I) = \alpha A + \alpha I$$

לכל $\alpha \neq 1$ לא יהיה שוויון.

דרך שלישית: היא לא שולחת את 0 ל-0. $T(0) = 0 + I = I$.

2. נגדיר $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ע"י משפט ההגדרה

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

מצאו את הגדרת T מפורשות, כלומר $T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = ?$

פתרון: נמצא את המקדמים של הבסיס שיתנו לנו את הוקטור $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & b-a \end{array}\right) \xrightarrow{-0.5R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & \frac{a-b}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{a+b}{2} \\ 0 & 1 & \frac{a-b}{2} \end{array}\right)$$

$$\frac{a+b}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{a-b}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = T\left(\frac{a+b}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{a-b}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$\frac{a+b}{2}T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{a-b}{2}T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{a+b}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{a-b}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}$$

3. הוכיחו/הפריכו:

(א) קיימת $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ המקיימת

$$T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\quad T\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$$

פתרון: ראשית, נבדוק האם הוקטורים $\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&4\\3&1&7\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

שלושת הוקטורים אינם בסיס. הוקטור השלישי תלוי באחרים.

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&1\\2&1&4\\3&1&7\end{array}\right)\to\cdots\to\left(\begin{array}{cc|c}1&0&3\\0&1&-2\\0&0&0\end{array}\right)$$

כלומר,

$$\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

העתקה לינארית חייבת לקיים:

$$T\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}=T\left(3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=3T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-2T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

אין שוויון!.
לכן לא קיימת העתקה לינארית כזאת.

(ב) האם קיימת העתקה לינארית שתענה על התנאים הבאים:

$$T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\quad T\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

מהחישובים שעשינו בסעיף הקודם, נקבל ש:

$$\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}=T\left(3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=3T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-2T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

קיבלנו שאין סתירה. שני הוקטורים הראשונים בת"ל, ולכן ניתן להשלים אותם לבסיס.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\end{pmatrix}$$

נשלים:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

לכן אפשר לבחור את הוקטור $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

כעת,

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

הם בסיס. ממשפט ההגדרה, קיימת העתקה לינארית שתקיים:

$$T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\quad T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

ההעתקה הנ"ל, תקיים את התנאים שביקשנו בשאלה.
למעשה, יש אינסוף ההעתקות שעונות על תנאי השאלה (כי את הוקטור שהוספנו אפשר לשלוח לכל וקטור. אין מגבלות).

4. תהא $T:V\to W$ ה"ל ו $v_1,\dots,v_n$ ב V. הוכיחו:

(א) אם $Tv_1,\dots,Tv_n$ בת"ל אז $v_1,\dots,v_n$ בת"ל (ב XI)

(ב) במידה ו T חח"ע- אם $v_1,\dots,v_n$ בת"ל אז $Tv_1,\dots,Tv_n$ בת"ל.
פתרון: תזכורת: T חח"ע אמ"ם $\ker T=0$.
יהי

$$\alpha_1Tv_1+...\alpha_nTv_n=0$$

צירוף לינארי מתאפס. מכיוון שT היא העתקה לינארית, זה שווה ל:

$$T(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = 0$$

כלומר, $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n \in \ker T$. אבל נתון שבגרעין יש רק את וקטור האפס, לכן

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$$

נתון ש$v_1, ..., v_n$ בת"ל, לכן $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$.

5. האם קיימת ה"ל חח"ע? אם כן, תנו דוגמה לאחת.

(א) $T : R_2[x] \to \mathbb{R}^2$

פתרון: לא. אם קיימת העתקה לינארית חח"ע כזאת, אז $T(1), T(x), T(x^2)$ בת"ל, לפי התרגיל הקודם. ב$\mathbb{R}^2$ אין שלושה וקטורים בת"ל (כי הוא ממימד 2).
דרך נוספת: נזכיר את משפט הדרגה. אם $T : V \to W$ העתקה לינארית, אז

$$\dim \ker T + \dim Im(T) = \dim V$$

אם T חח"ע אז $\dim \ker T = 0$.
אם קיימת העתקה כזאת, נקבל ש:

$$0 + \dim Im(T) = 3$$

כלומר, $\dim Im(T) = 3$. אבל $Im(T) \leq \mathbb{R}^2$, ולכן המימד שלו קטן שווה מ2.

(ב) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

פתרון: כן.

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ a+b \end{pmatrix}$$

קל לראות שזאת העתקה לינארית חח"ע.

6. האם קיימת ה"ל על? אם כן, תנו דוגמה לאחת.

(א) $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}_2[x]$

פתרון:

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = b + cx + dx^2$$

(ב) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$
פתרון: לא. אם קיימת העתקה כזאת, נקבל ממשפט הדרגה ש:

$$\dim\ker T+\dim Im(T)=\dim V$$

$$\dim\ker T+4=3$$

לא ייתכן. כי מימד של תת מרחב הוא מספר אי שלילי.
דרך נוספת: נסתכל על הוקטורים

$$\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$$

אילו וקטורים בת"ל ב$\mathbb{R}^4$. אם T היא על, אז לכל אחד מהם יש מקור. נסמן

$$T(v_i)=e_i$$

(ייתכן שיש כמה מקורות. נבחר אחד לכל אחד).
ממשפט שציטטנו, נקבל ש$v_1,...,v_4$. כלומר, יש 4 וקטורים בת"ל ב$\mathbb{R}^3$. ידוע שזה לא ייתכן.

7. האם קיימת $T:V\to V$ כך ש $Im(T)=\ker T$ כאשר:

(א) $V=\mathbb{R}^3$
פתרון: אם קיימת העתקה כזאת, אז $\dim Im(T)=\dim\ker T$. נציג במשפט הדרגה ונקבל:

$$\dim\ker T+\dim Im(T)=\dim V$$

$$2\dim\ker T=3$$

כלומר, $\dim\ker T=\frac{3}{2}$, וזה לא ייתכן. כי מימד הוא מספר שלם.
לכן לא קיימת העתקה לינארית כזאת.

(ב) $V=\mathbb{R}^4$
אם קיימת העתקה לינארית כזאת, אז נקבל ש$\dim\ker T=\dim Im(T)=2$.
נסתכל על

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\w\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$ImT=sp\{e_1,e_2\}=\ker\{e_1,e_2\}$$

דרך נוספת להגדיר העתקה שתענה על הדרישות הוא דרך משפט ההגדרה. נקח את הבסיס הסטנדרטי למשל

$$\{e_1, ..., e_4\}$$

נגדיר :

$$T(e_1) = T(e_2) = 0, T(e_3) = e_1, T(e_4) = e_2$$

קיבלנו שמימד הגרעין הוא לפחות 2 (כי יש בו שני וקטורים בת"ל) ומימד התמונה הוא לפחות 2 (כי יש בו שני וקטורים בת"ל). ממשפט הדרגה נקבל שהמימדים הם בדיוק 2.
לכן,

$$\ker T = span\{e_1, e_2\} = Im\{e_1, e_2\}$$

(הכלה ושוויון מימדים).