מרצה: עודי חרוש   מייל: uziharush@gmail.com

שימושים

תרגיל: יהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ו- $E\in\mathbb{F}^{m\times m}$ מט' הפיכה

הוכיחו ש- $R(E\cdot A)=R(A)$

(אם נכפל מימין $C(A\cdot E)=C(A)$)

פתרון: (א) יהי $v\in R(EA)$ מכאן קיים x כך ש-

$R(EA)=\{(EA)^t\cdot x \mid x\in\mathbb{R}^m\}$

$$(EA)^t\cdot x=v$$
$$\Downarrow$$
$$A^t(\underbrace{E^t\cdot x}_{y})=v$$
$$\Downarrow$$
$$A^t y=v$$
$$\Downarrow$$
$$v\in R(A)$$

(ב) יהי $v\in R(A)$ אז קיים x כך ש-

$$A^t x=v$$
$$\Downarrow$$
$$(E^{-1}EA)^t x=v$$
$$\Downarrow$$
$$A^t(E^{-1}E)^t x=v$$
$$\Downarrow$$
$$A^tE^t(E^{-1})^t x=v$$
$$\Downarrow$$
$$(EA)^t\underbrace{(E^{-1})^t x}_{y}=v$$
$$(EA)^t\cdot y=v$$
$$\Downarrow$$
$$v\in R(EA)$$

מסקנה: כפל משמאל במט' הפיכה לא משנה את מרחב העמודות.

כפל משמאל במט' הפיכה = (פ'כו)

תרגיל: תהי

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & * \\ 1 & * & 1 \\ * & 1 & * \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

נתון ש- $Ax=0$ יש שני פתרונות
בת"ל

מצאו את A

פתרון: נתון ש- $Ax=0$ יש שני פתרונות בת"ל

לכן $\dim(N(A)) \geq 2$

אך אינו יכול להיות 3

נניח בשלילה שהוא כן 3 אז $\dim(N(A))=3$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\dim(N(A))}_{3} + \text{rank}(A) = 3$$

$$\Downarrow$$

$$\text{rank}(A)=0$$

$$\Downarrow$$

$$A=0$$

סתירה לכך ש- $A\neq 0$

לכן $\dim(N(A))=2$ לכן לפי משפט הדרגה

מתקיים $2+\text{rank}(A)=3$

$$\text{rank}(A)=1$$

$\mathrm{rank}(A)=1$

$\Downarrow$

$\exists\, j\ ; \quad C(A)=Sp\{c_j(A)\}$

כלומר כל העמודות הן כפולה של עמודה כלשהי $C_j(A)$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

דוגמה שלנו

<u>תרגיל</u>: יהי $A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$ אז

הוכיחו ש-

$$\mathrm{rank}(A+B)\le \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$$

<u>פתרון</u>: נתבונן בעמודה ה- i של $A+B$

$$C_i(A+B)=C_i(A)+C_i(B)$$

זה נכון לכל i לכן

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i C_i(A+B)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i C_i(A)+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i B_i(B)$$

$\Downarrow$

$$C(A+B)\subseteq C(A)+C(B)$$

$\Downarrow$

$$\dim(C(A+B))\le\dim\big(C(A)+C(B)\big)=\dim(C(A))+\dim(C(B))-\underbrace{\dim(C(A)\cap C(B))}_{\geq 0}$$

$$\dim C(A+B)\le\dim C(A)+\dim C(B)$$

$$\mathrm{rank}(A+B)\le\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$$

תרגיל: תהי $A\in\mathbb{F}^{3\times 2}$ האם קיימת מט' $B\in\mathbb{F}^{2\times 3}$

כך ש- $A\cdot B\in\mathbb{F}^{3\times 3}$ היא מט' הפיכה.

פתרון: תשובה לא קיימת.

נניח בשלילה שכן אז

$\text{rank}(A\cdot B)=3$

מט' $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה

$$\Updownarrow$$

$$\text{rank}(A)=n$$

$$\Updownarrow$$

$$\dim(N(A))=0$$

$$\Updownarrow$$

$$CF(A)=I$$

$$2\geq \text{rank}(A)\geq \text{rank}(AB)=3$$

סתירה (יוצא ש- $2\geq 3$)

ל ש״י לעמודות מול שורות

$\{V_1,\dots,V_n\}$ קבוצה $\overbrace{\quad}^{\text{תמיד}}$ ונבצה ממשו

תת קבוצה קטנה שפורשת את אותו מ״ו

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ V_1 & \cdots & V_n \\ | & & | \end{pmatrix} \to \cdots \to$$

ניקח את העמודות המקוריים שיש להם איברים מובילים

$$C(A) = sp\{V_1,\dots,V_n\}$$

$\{V_1,\dots,V_k\}$ וקטורים בת״ל כונים

נשלים $w \notin sp\{V_1,\dots,V_k\}$ (כלומר $\underbrace{\{V_1,\dots,V_k,w\}}_{\text{בת״ל}}$)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} | & & | & x \\ V_1 & \cdots & V_k & y \\ | & & | & z \\ & & & w \\ & & & \vdots \end{array}\right) \to \cdots \to \begin{pmatrix} \boxed{0\ 0\ 0} & \underbrace{\boxed{\quad}}_{\text{תנאי הומוג'}} \end{pmatrix}$$

ניקח w שאינו מקיים את תנאי הומוגני

העתקות ליניאריות

הזכרה: יהיו V, W מ"ו מעל אותו שדה $\mathbb{F}$

אז $T: V \to W$ היא ה"ל

אם מתקיים

$$\forall v_1, v_2 \in V;\ T(v_1 +_V v_2) = T(v_1) +_W T(v_2)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{F}, v \in V;\ T(\alpha \cdot_V v) = \alpha \cdot_W T(v)$$

דוגמאות: 1. יהיו $W = \mathbb{F}^m$ ו- $V = \mathbb{F}^n$

תהי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ אז נגדיר

$$\forall v \in V = \mathbb{F}^n;\ T(v) = A \cdot v \in \mathbb{F}^m$$

הוכחה:

1. $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{F}^n;\ T(v_1 + v_2) = A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 =$

$= T(v_1) + T(v_2)$

2. $\forall \alpha \in \mathbb{F}, v \in V;\ T(\alpha v) = A(\alpha v) = \alpha A v =$

$= \alpha T(v)$

---

2. $T: \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n-1}[x]$ ע"י

$$T(p(x)) = p'(x)$$

נראה כי ה"ל.

.3 $T:\mathbb{F}^{n\times n}\to\mathbb{F}$ המוגדרת ע"י

$$T(A)=tr(A)=a_{11}+a_{22}+a_{33}+\dots+a_{nn}$$

.1

$$\forall A_1,A_2\in\mathbb{F}^{n\times n};\ T(A_1+A_2)=tr(A_1+A_2)=tr(A_1)+tr(A_2)=T(A_1)+T(A_2)$$

.2

$$\forall\alpha\in\mathbb{F},A\in\mathbb{F}^{n\times n};\ T(\alpha A)=tr(\alpha A)=\alpha\,tr(A)=\alpha T(A)$$

הערה:

$$T(v_1+v_2)=Tv_1+T(v_2)\quad+\quad T(\alpha v)=\alpha T(v)\iff T(v_1+\alpha v_2)=T(v_1)+\alpha T(v_2)$$

הקריטריון המקוצר

משפט: אם $T:V\to W$ ה"ל אזי $T(0_v)=0_w$

כלומר אם T ה"ל ווקטור האפס הולך ל-0.

דוגמא: $V=W=\mathbb{R}^2$ מוגדרת ע"י

$$T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2\\b\end{pmatrix}$$

היא אינה ה"ל

$$T\left(4\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\4\end{pmatrix}$$

$$\neq$$

אך

$$4T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$$

כלומר ישנה דוגמא לכך ש- $T(\alpha v)\neq\alpha T(v)$

אינטואיציה

$T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_3[x]$

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = (2a+2b-c)x^3 + (a+c-d)x^2 + (a^2+5c)x + (ac+d)\cdot 1$$

תרגיל: יהיו $T,S: V \to W$ ט"ל ו- $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס ל- V כך ש-

$\forall i;\ T(v_i)=S(v_i)$

הוכיחו ש- $T \equiv S$

כלומר $\forall v\in V;\ T(v)=S(v)$

פתרון: יהי $v\in V$ כיוון ש- B בסיס קיימים $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ כך ש-

$$v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$$

לכן

$$T(v)=T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right) \underset{\text{ט"ל } T}{=} \sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(v_i) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i S(v_i) \underset{\text{ט"ל } S}{=} S\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right) = S(v)$$

$$T(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\dots+\alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + T(\alpha_2 v_2+\dots+\alpha_n v_n) \underset{\text{אינדוקציה}}{=}$$

$$= \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_n T(v_n)$$

משפט ההגדרה

יהיו V,W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ו- $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס ל- V. ו- $C=\{w_1,\dots,w_n\}$ קבוצה ב- W אזי קיימת ה"ל יחידה כך ש-

$$\forall 1\le i\le n \quad T(v_i)=w_i$$

פרשון: $T: \mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^2$ כך ש-

$$T(1+x)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$T(x+x^2)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$T(1)=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$$

פתרון: יהי $a_0+a_1x+a_2x^2\in\mathbb{R}_2[x]$ נכתוב אותו כצ"ל ע"פ $\{1+x,x+x^2,1\}$ (בסיס)

$$\alpha(1+x)+\beta(x+x^2)+\gamma(1)=a_0+a_1x+a_2x^2$$

$$\begin{array}{c} 1\\ x\\ x^2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_0\\ 1 & 1 & 0 & a_1\\ 0 & 1 & 0 & a_2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l}\beta=a_2,\ \alpha=a_1-a_2\\ \gamma=a_0-a_1+a_2\end{array}$$

$$a_0+a_1x+a_2x^2=(a_1-a_2)(1+x)+a_2(x+x^2)+(a_0-a_1+a_2)\cdot 1$$

$$T(a_0+a_1x+a_2x^2)=(a_1-a_2)T(1+x)+a_2T(x+x^2)+(a_0-a_1+a_2)T(1)=$$

$$=(a_1-a_2)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+(a_0-a_1+a_2)\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} \quad ✓$$

תרגיל: האם קיימת $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

כך ש:

$$T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\10\\11\end{pmatrix}$$

פתרון: נשים לב ש- $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\right\}$ אינו בסיס ל- $\mathbb{R}^2$

כי יש ת"ל $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

נניח בשלילה שכן קיימת ה"ל כזאת אז

$$T\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\10\\11\end{pmatrix}$$

$$\|$$

$$T\left(2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)=2T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\7\end{pmatrix}$$

סתירה.

מה היה קורה אם היינו דורשים $T\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\7\end{pmatrix}$

במקום $\begin{pmatrix}8\\10\\11\end{pmatrix}$??

אז אפשר לתת ה"ל $T\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\7\end{pmatrix}$

הנתון מיותר כי הוא מתקבל ע"י שני הנתונים הראשונים.