

תרגיל 10

להגשה עד 22.1.18

תזכורת: $l^2 := L^2(\mathbb{N}, \mathbb{P}(\mathbb{N}), \eta)$, באשר: $\eta = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n$ (מידת הספירה).

שאלה 1

יהי \mathcal{H} מרחב הילברט ו- \mathcal{M} תת מרחב לינארי של \mathcal{H} . הוכיחו כי: $(\mathcal{M}^\perp)^\perp = \overline{\mathcal{M}}$.

שאלה 2

נגדיר: $F := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R} \mid \sup_n n|a_n| < \infty\}$
הוכיחו או הפריכו:

1. F תת מרחב לינארי של l^2 .

2. הקבוצה $F \cap l^2$ סגורה ב- l^2 .

שאלה 3

יהיו:

$$u_1 = (1, 2, 0, 0, \dots)$$

$$u_2 = (0, 1, 2, 0, \dots)$$

$$u_3 = (0, 0, 1, 2, \dots)$$

\vdots

1. הוכיחו כי המערכת $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ אינה שלמה במרחב l^2 .

2. נסמן: $V = \text{span}\{(1, 0, 0, \dots)\}$, $U = \text{span}\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

האם $U + V$ צפוף ב- l^2 ?

שאלה 4

יהי \mathcal{H} מרחב הילברט עם בסיס בן מניה ותהי $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$.

נתון כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$, וכי לכל $y \in \mathcal{H}$ מתקיים: $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle$.

הוכיחו כי: $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$.

שאלה 5

תהי: $E = \{(x_n) \in l^2 \mid \forall n \geq 1 : x_{2n-1} = x_{2n}\}$

1. הוכיחו כי E תת מרחב סגור של l^2 .
2. מצאו את E^\perp .
3. יהי $x \in l^2$. מצאו את הקירוב הטוב ביותר של x ל- E .

☺ בהנאה