

שאלון בחינה בקורס: חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 (89-218)

סמסטר ב; מועד א. תשע"ב

שם המרצה: ד"ר שחר נבו.

משך הבחינה  $2\frac{3}{4}$  שעות.

ללא חומר עזר, דף נוסחאות מצורף

ענה על 5 מתוך 6 השאלות הבאות. נמק תשובותיך.

1. א. בדוק התכנסות והתכנסות בהחלט של הטור  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$  . (10)

ב.  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$  . (10)

2. א. האם המשוואה  $e^{xy} + (x-1)^2 + y = 1$  מגדירה את  $y$  כפונקציה של  $x$  בסביבת  $(1,0)$ ?  
אם כן מצא את  $h'(1)$  . (10)

ב. מצא  $f''_{xy}$  באשר  $f(x, y) = e^{xy} \sin x - \cos xy$  . (10)

3. א. עבור אילו ערכי  $x$  מתכנס הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{nx}$  . מצא סכום הטור עבור ערכי  $x$  הנ"ל. (11)

ב. השטח שבין גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{e^x}{x}$  ,  $1 \leq x \leq 2$  לבין ציר  $x$  מסתובב סביב ציר  $y$  . מצא נפח

גוף הסיבוב שנוצר. (9)

4. א. חשב  $\int x^3 \ln x dx$  . (10)

ב. הצג  $f(x) = \cos^2 x$  כטור חזקות אינסופי לכל  $x$  . (10)

5. מצא את כל הפתרונות של המד"ר  $y' + 2xy = x$  ומצא פתרון המקיים  $y(1) = 2$  .

6. א. מצא את כל הפתרונות הממשיים של המערכת (12) .  
$$\begin{cases} y_1' = -y_2 \\ y_2' = 9y_1 \end{cases}$$

ב. חשב את  $e^A$  עבור  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  . (8)

בהצלחה!

## פתרון המבחן

### שאלה 1

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} t dt = \left[ \frac{t^2}{2} \right] = 0 \text{ נקבל } t = \arcsin x \text{ נציב } dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

### שאלה 2

ב. מצא  $f''_{xy}$  באשר  $f(x, y) = e^{xy} \sin x - \cos xy$ .

$$f'_x = ye^{xy} \sin x + e^{xy} \cos x + y \sin xy$$

$$f''_{xy} = e^{xy} \sin x + xye^{xy} \sin x + xe^{xy} \cos x + \sin xy + xy \sin xy$$

### שאלה 3

א. נשתמש במבחן השורש.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ne^{nx}} = e^x$  ולכן הטור מתכנס כאשר  $e^x < 1$  ז"א  $x < 0$ .

עבור  $x = 0$  נקבל את הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} n$  שהוא טור מתבדר ולכן הטור מתכנס אם ורק אם  $x < 0$ .

נסמן  $a_n = e^{nx}$  היא סדרה הנסית שהאיבר הראשון שלה הוא  $e^x$  ומנת הסדרה  $e^x$ .

לכן מספיק לחשב את  $f(x)$  ולגזור.

$$f'(x) = \frac{e^x}{(1-e^x)^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^x \cdot (1-e^x) + e^{2x}}{(1-e^x)^2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$$

נקבל שהסכום הוא  $f(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$

ב. השטח שבין גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{e^x}{x}$ , לבין ציר  $x$  מסתובב סביב ציר  $y$ . מצא נפח

גוף הסיבוב שנוצר.

$$2\pi \int_1^2 x \cdot \frac{e^x}{x} dx = 2\pi \int_1^2 e^x dx = 2\pi e^2 - 2\pi e$$

הנפח המתקבל הוא  $2\pi e^2 - 2\pi e$

### שאלה 4

א. חשב  $\int x^3 \ln x dx$ .

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$v = \frac{x^4}{4} \quad u = \ln x \\ v' = x^3 \quad u' = \frac{1}{x}$$

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \int \frac{x^3}{4} dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16}$$

ב. הצג  $f(x) = \cos^2 x$  כטור חזקות אינסופי לכל  $x$ .

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)$$

נשים לב ש  $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)$

טור טיילור של  $\cos x$  הוא  $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$  ולכן  $\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}$  סה"כ נקבל ש

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$$

### שאלה 5

מצא את כל הפתרונות של המד"ר  $y' + 2xy = x$  ומצא פתרון המקיים  $y(1) = 2$ .  
 נפתור תחילה את המשוואה ההומוגנית  $y' + 2xy = 0$  ונקבל  $y = ce^{-x^2} \Leftrightarrow y = ce^{-\int 2xdx}$ .  
 הפתרון הפרטי של הלא הומוגני הוא  $y = \frac{1}{2}$  ולכן הפתרון הכללי הוא  $y = ce^{-x^2} + \frac{1}{2}$ .  
 נתון ש  $y(1) = 2$  ולכן  $2 = ce^{-1} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow c = \frac{3e}{2}$  והפתרון הוא  $y = \frac{3e^{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}$ .

### שאלה 6

א. מצא את כל הפתרונות הממשיים של המערכת

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 \\ y_2' = 9y_1 \end{cases}$$

$$\lambda = \pm 3i \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -9 & \lambda \end{pmatrix} = 0$$

עבור  $\lambda = 3i$  נקבל את הוקטור העצמי  $\begin{pmatrix} 1 \\ -3i \end{pmatrix}$

ואז הפתרון הוא מהצורה

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x & \Leftrightarrow & y_1 = \cos 3x + i \sin 3x \\ y_2 &= 3c_1 \sin 3x - 3c_2 \cos 3x & \Leftrightarrow & y_2 = -3i \cos 3x + 3 \sin 3x \end{aligned}$$

ב. חשב את  $e^A$  עבור  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

$$e^A = e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 2e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$$